反例からみた数学 改訂増補版

岡部恒治
白井古希男
一松信
和田秀男
著

発行 遊星社

目　次

数学の基礎と反例——白井古希男

幾何学と反例——岡部恒治

代数学における反例——和田秀男

初等整数論

線型代数学

群論入門

代数方程式の解法

解析学における反例——一松信

解析学における反例（増補）

★改訂増補版について★

「解析学における反例（増補）」を始めとし，「代数学における反例」中の“初等整数論”の項ではその後の進展を中心に改訂・加筆を施した．その他，語句の修正等を行なった．

数学の基礎と反例

白井古希男

§1　反例とは何か

●反例というもの　この本を読まれる方のなかには，“反例”がどのようなものかをよく知っている方もおられるとは思うけれど，まずは“反例”の説明から始めよう．

反例の多くは，次のような状況のときに必要になってくるのではないだろうか．

いま，なにかある性質とか条件とかを調べているものとする．その条件をみたすものが１つもなければ，それでおしまい．しかしその条件をみたす例が，いくつか見つかることもある．そこで，そのような例をたくさん集めているうちに，それらがある共通の特徴をもっていたり，ある範囲に属すことが明瞭になってきたとしよう．すると，次のような疑問がうかんでくる．

　この範囲に属すどんなものも，この条件をみたすのではないだろうか？

　この特徴をもつすべてのものが，この条件をみたすのではないだろうか？

そこで，大胆に「この範囲に属すどんな元もこの条件をみたす」と予想してみよう．そして，この予想の正しさを，なんとか確立しようとしてみる．条件をみたす具体例をたくさんあげても，正しいという保証にはならない．ここに証明が必要になってくる．いろいろと方針をたてては，証明を試みる．道筋が１本でも通れば，証明が１つでもでき上れば，それでおしまい．すなわち，予想は正しかったことになる．

しかし，一般にはなかなか道は通じない．この方針が悪かったのだろうか，と不安になる．いやいや，そんなことはないはずだ，と思いなおし，道筋がうまく通らないところをさらにくわしく調べることにする．そうこうしているうちに，条件をみたさないものが見つかることがある．これが**反例**である．１つでも反例が見つかれば，それでおしまい．すなわち，予想は誤まっていたことになる．すると，予想は修正を余儀なくされ，別の予想にとって代わられる．

けれども反例もなかなか見つからないとなると，再び証明の方針をたて，考え続ける……．

こう書いてみると，これは普通の数学の活動そのものである．そうだ．数学を自分のものとして積極的に考えている限り，反例は日常のものとして，必要なものとして，必ず現われてくるのだ．

なにも説明など必要ではなかったのだ．“反例”は，「すべての言葉は説明が必要だ」という一般的な命題の反例だったのだ．どうりで『広辞苑』には“反例”という見出しがないわけだ．

●反例の定義　ところで，数学に現われる論理的な言葉にどんなものがあるかを調べてみると，基本的には“かつ”，“または”，“ならば”，“でない”，“すべての …”，“… が存在する”の６つの言葉からなることがわかる．これらは日常用語と同じ意味で用いられるが，念のためにいくつかの注意を与えよう．

“P または Q”は，P, Q という命題の少なくとも一方が成り立つという意味で用い，P, Q の一方だけが成り立つという意味ではない．“P ならば Q”は，P が成立しないか，または Q が成り立つという意味であって，論理記号 $\rightarrow$ を用いて，$P \rightarrow Q$ などと書くこともある．また，“P でない”は $\neg P$ などと書く．

“すべての …”とか“… がある”という言葉遣いをするときは，どの範囲のすべてなのか，どの範囲にあるかが明確でなければならない．したがって，あらかじめ範囲を定め，これを**対象領域**とよぶ．“対象領域に属すすべての元が条件 $P(x)$ をみたす”や“対象領域の元で条件 $P(x)$ をみたすものがある”という命題は，対象領域の元を表わす変数 x を用いて

$$\forall x P(x) \qquad \text{とか} \qquad \exists x P(x)$$

と書く．∀ や ∃ は，all とか exist の頭文字からとったものであろう．$\forall x P(x)$ の形の命題を**全称命題**とよぶ．

さて，$\forall x P(x)$ と予想された命題の**反例**とは，$\neg P(a)$ が成り立つような，つまり $P(a)$ が偽となるような対象領域の元 a のことである．

ところで，加法の交換法則

$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

を普通は

$$x + y = y + x$$

と書くように，全称命題の“すべて”は，しばしば省略され，$P(x)$ と書かれることが多い．

以下に，反例の簡単な例をあげよう．

例 1　n が自然数を表わすとき，全称命題「$2^n \geqq n^2$」を考える．これは，ただ 1 つの反例 $n=3$ をもつ．

例 2　“佳人薄命”という言葉がある．“美しい女の人は若死をする”という意味から転じて，現在は“美しい女の人はとかくふしあわせなものだ”という意味で用いられているが，いま言葉どおり解釈したとしよう．これは，x を佳人を表わす変数とするとき，

$$P(x):\quad x \text{ は薄命である}$$

という条件を用いて $\forall x P(x)$ と書ける命題である．したがって，美人で長生きをする人が 1 人でもいれば，反例になる．

例 3　与えられた条件そのものが，2 つの条件から組み合わされてできていることもある．たとえば，

$x^2 + y^2 = 0$　　と　　$x = 0$ かつ $y = 0$　($x = y = 0$ と略記する)

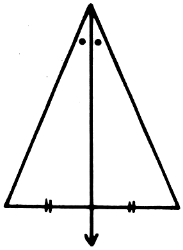
という 2 つの条件を用いて書ける全称命題

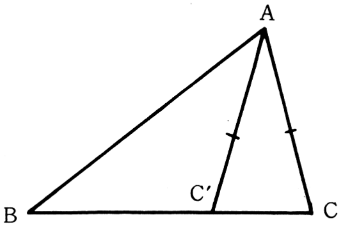
$$「x^2 + y^2 = 0 \;\rightarrow\; x = y = 0」$$

を考える．これは，対象領域を実数全体にとれば真となるが，複素数全体にとれば $i^2+1=0$ は真だが $i=1=0$ は偽となるから反例 $x=i, y=1$ をもつ．

例 4　「三角形の頂角の 2 等分線が底辺を等分するならば，この三角形は 2 等辺三角形であるか」という問題を考えてみる．もしも，「2 つの三角形において，対応する 2 辺とそのうちの 1 辺に対する角がそれぞれ等しいならば，2 つの三角形は合同である」という定理があれば，これを用いて 2 等分線によってできた 2 つの三角形は合同になり，最初の問題は解決する．

ところで，この命題は“2 辺とそのはさむ角”の合同定理とよく似ており，





2つの三角形がともに鋭角三角形か，ともに直角三角形か，ともに鈍角三角形だと成り立つので，試験の際などうっかり図を描くと証明できてしまうのだ．しかし，これは成り立たない．その反例は上の図の △ABC と △ABC′ である．

けれども，この命題は結論を「対応する2辺のうち残りの1辺に対する角はたがいに等しいか補角をなす」と変更すれば正しくなる．そして，最初の問題にこの修正された命題を用いれば，補角のときは2等分線に対応する両底角の和は π となり起こりえぬことがわかるから，やはり問題は解決する．

例5 角の3等分問題

「任意に与えられた角を，定木とコンパスを有限回使用して，3等分できるか」という問題を考えてみよう．角の2等分はよく知っているので，3等分もできそうな気がする．しかし反例がある．60° がその一つである．ただし，60° が反例であるという証明は，簡単ではない．

なお，この問題は，

立方体倍積問題「与えられた立方体の2倍の体積をもつ立方体を作れ」

円積問題「与えられた円と同じ面積をもつ正方形を作図せよ」

とともに，三大作図不可能問題の一つに数えられており，古代ギリシア時代から難問として知られていた．

例6 大学院生の林和則君に教えてもらったのだけれど，

All that glitters is not gold.

なる“ことわざ”があるそうだ．訳をつければ，

光る物　必ずしも金ならず

とでもいうのであろうか．

うちの下の娘なども，ピカピカ光る物をいろいろ拾ってきては，しまいこんでいる．“光る物はすべて金である”と彼女が信じているとすれば，ビーズでも見せて「これは金ではないよ」と教えればすむのであろうが，具体的な反例をあげることなく反例の存在を主張しようとすれば，まあ上のようなことわざで説得することにでもなるのであろうか？

§2　無限の世界に向かって

“数学の基礎”というとき，何を基礎と考えるかは個々の数学者によってちがうかもしれない．しかし，数や集合，写像といった概念は，大多数の数学者もこれに含めて考えるのではなかろうか．

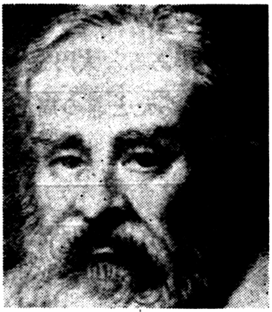
ところで，数や集合といったとき，そこにはつねに“無限”が顔をのぞかせる．ヘルマン・ワイル（C. H. H. Weyl, 1885−1955）の言ったように，まさしく「数学とは無限についての科学」なのである．この“無限”の問題は，古代ギリシアの時代から，“ゼノンの逆理”のように多くのパラドックスを生み続け，人々を悩ませてきた．

そうした困難な新分野を開拓してゆくとき，そのようなときにこそ反例は重要さを増してくる．

本稿においては，この“無限”の問題に視点をすえ，反例の果たした役割を考えてみることにしよう．

★ゼノンの逆理　駿足のアキレスが，足ののろいカメを追いかける．カメが初めにいた地点にアキレスがきたときには，すでにカメは少し先の地点へ進んでいる．アキレスがさらにその地点まできたときには，すでにカメはまた少し先の地点へ進んでいる．この操作は，いつまでたっても終わることがない．だから，いかに駿足のアキレスといえども，鈍足のカメに追いつくことはできない．

まず我々は1630年代にさかのぼって，話を始めよう．



ガリレオ

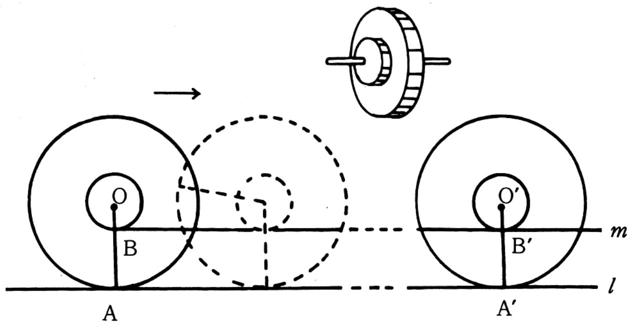
●ガリレオのパラドックス　いまから，およそ350年ほど前――ルネッサンスも終りに近いころ――ここイタリアはアルチェトリの別荘の一隅で1人の老人が，視力の衰えた目をみひらき，薄暗い光の下でペンを走らせていた．

彼こそは“実験”と“数学による論証”に基づく近代物理学の方法を確立し，偉大な業績を歴史にしるしたガリレオ・ガリレイ（G. Galilei, 1564－1642）その人であった．学問上の輝かしい名声と，それにふさわしい待遇を受けてきた生涯の最晩年になって，彼は今，カトリック信者であるにもかかわらず聖書に反する「地動説」を信じかつ弁護したかどにより，二度にわたる宗教裁判にかけられ断罪され幽閉の身であった．

裁判による肉体的・精神的な苦痛，有罪ゆえの社会的な苦境，持病の痛風の悪化，その上に最愛の娘を失うなど，たび重なる悲劇にも敗けまいとするかのように，彼は老いの身に精根こめて，『新科学対話』に没頭していた．当時，大学で教えられていた，古人の学説だけを根拠としその上で論理をもて遊ぶ死んだ学問ではなく，街の職工たちが実際に機械を扱う経験のなかから注意深い観察と検証を通じて得られた事実に基づいて発展してきた新しい科学を――特に自分が研究し発見したこと，知りえたこと，考えたことを中心として――その要点を明確にかつ平易に述べようと苦心していたのである．多くの市民に伝えることを願い，あえてラテン語でなく俗語たるイタリア語を用いて書いているにもかかわらず，教皇の力の強いこの国では出版を引き受けてくれるところとてなかった．

我々は，彼の原稿に現われる無限についての話題を紹介することから始めよう．

アリストテレスの車輪　はり合わされた，異なる半径 $r, R\ (r<R)$ をもつ同心円がある．大円をすべらぬよう直線 l に沿って 1 回転する．大円が最初 l 上にあったときの周上の点 A が，1 回転後に l 上の点 A′ にくるとする．



この間に大円の中心 O の移動した距離 OO′ は，線分 AA′ の長さ，すなわち大円の周の長さ $2\pi R$ に等しい．このとき小円は完全に大円に固定されているから，大円と小円は同時に 1 回転することになる．しかし，大円が l 上をころがる間に小円は m 上をとび上りもからまわりもせずに 1 回転しているだけだから，小円は周の長さ $2\pi r$ しか移動していないはずである．ところが実際には，小円は上図の BB′ 間 $2\pi R$ を通過している!!

この問題は，アリストテレス（Aristoteles, B.C. 384—B.C. 322）によって力学の問題として提出され分析されていたが，ガリレオはその分析に不満をもち，取り上げたといわれる．さて，『新科学対話』には次のような議論が現われる．

（1）　小円がすべらないとすれば $2\pi r$ しか進まないのに，$2\pi R$ 進んだのだから，小円はすべったにちがいない．

（2）　大円は回転中すべらなかったのだから，絶えずその接点を変えている．したがって，小円も同じように接点を変えねばならない．なぜなら，A 以外の大円上のどの点からも B を通る半径を引くことができず，したがって小円は大円が接点を変えるごとにその接点を変え，小円上のどんな点も線分 BB′ の 1 点以外にふれることができない．だから小円は

すべっていない．

一体，どのように考えたらよいのだろうか．

平方数の数　自然数 1, 2, 3, 4, … のうち，4とか9のように，自然数 n を用いて n^2 の形で書ける数を**平方数**とよぶ．平方数 n^2 に対し，自然数 n をここでは n^2 の**平方根**とよぶことにする．さて，平方数はいくつあるだろうか？

（1）平方数は，平方数に対応した平方根の数だけある．なぜなら，どの平方数もただ1つの平方根をもち，どの平方根もただ1つの平方数をもつからである．ところで，いかなる自然数も，ある平方数の平方根と考えられるから，平方根の全体は自然数の全体と同じだけある．よって，平方数は自然数と同じだけある．

（2）明らかに，2, 3, 5, 6, … などのように，数の大部分は平方数ではない．ゆえに，自然数の全体は平方数の全体より多い．

のみならず，平方数の密度は，数の範囲を大きくすればするほど小さくなる．たとえば10までては 1, 4, 9 の3個，100までては10個，1万までては100個の平方数がある．だから，その密度は $\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ とへっていく．そして100万までには $\frac{1}{1000}$ しかない．それなのに，無限個までの間には，もしその個数を考えることができたとすれば，（1）でみたように自然数と同じだけ平方数があると認めざるをえない．一体，どのように考えたらよいのだろうか？

●1対1対応　以下に，上に述べた2つの問題を整理しながら考えてみよう．まず，この2つの問題に関する考察のなかに，我々は2つの無限の集まりの間の“1対1対応”あるいは“単射”というきわめて一般的な概念が含まれていることに注目したい．

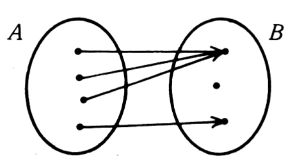
日常，2種類のものの個数を比較するとき，我々は，“それぞれの数を数えて，数え上げた数どうしの大小で比較する”か，あるいは“数を数えることなく直接に多少を比較する”かのいずれかである．直接法の例は，コンパで大勢の出席者とたくさんのコップを比較するときなどにみられる．どちら

が多いかをみるのには，ちょうど乾杯のときのように１人１人が１つずつコップを持ってみればすぐにわかるであろう．コップを持てない人がいれば人の方が多かったのだし，テーブルにコップが残っていればコップの方が多かったわけである．このように，２種類のものの集まりから１つずつ元を取り出して組を作り，また残りのもののなかから１つずつ選んで１組作り，……とくりかえしてゆき，２種類のものが同時になくなれば同数，一方が残り他方が尽きてしまえば残った方が多い，というわけである．この結果は，２つの集まりの各々からの元の取り出し方には無関係であろう．この直接法を一般的に述べる前に，“写像”の復習をしておこう．

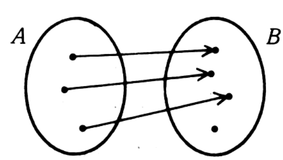
A, B を集合とする．f が“A から B への写像である”とは，A の元の各々に B の元を１つずつ対応させる対応のことである．f によって，A の元 a に対応する B の元を $f(a)$ と書く．写像 f によって，異なる A の元 a, a' にはつねに異なる B の元が対応するとき，すなわち

$$a \neq a' \rightarrow f(a) \neq f(a')$$

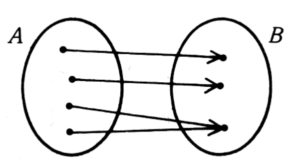
のとき，f を**１対１の写像**とか**単射**とよぶ．B のどの元 b にも，$f(a)=b$ となる a があるとき，f を**上への写像**とか**全射**とよぶ．全射でありかつ単射であるものを**上への１対１写像**とか**全単射**とよぶ．



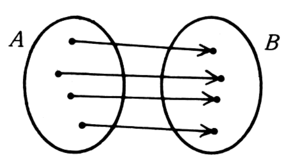
写像



単射



全射



全単射

さて，有限個の元をもつ A, B について，直接法とは A から B への全単射が1つでもあれば，A と B とは同数，A から B の真部分集合への全単射があれば，A より B は多いという比較方法だったのである．そして，結果は全単射のとり方によらないというのであった．

数を数え上げて比較する方法も，$\{1, 2, \cdots, n\}$ から数えるものの全体への全単射が存在するような n を見つけることであるから，直接法の方がより基本的なのであろう．ちなみに，この n が数えるものの個数なのである．全単射の重要さは，コンパが終わって集金するときの幹事になってみれば明らかだろう．

●問題の分析　さて，問題の分析に入ろう．

車輪の問題での主張は，整理すれば次のようになるだろう．

（1）小円がすべらないのなら，小円周の長さと小円の移動した距離は等しくなければならない．しかるに，長さは異なるからすべった．

（2）小円周上の点全体から線分 BB′ 上の点全体へは，接点に接点を対応させることによって，全単射が作れる．したがって，小円はすべっていない．

ところで，この2つの主張をよく読むと，“すべらない”という言葉が2つの意味で用いられており，それがパラドックスの原因のように思える．

“円が直線上をすべらない”が，“円周の長さと円の移動距離が等しい”の意味なら，(1)は定義そのものであり，(2)は，小円周上の点全体から線分 BB′ への全単射があるので，円周の長さと線分 BB′ の長さは等しい，ということになる．一方，“円が線分上をすべらない”が“全単射が存在する”の意味なら，(2)は定義そのものであり，(1)は，全単射があれば長さが等しい，となる．いずれにせよ，命題

「円周から線分への全単射が存在するから長さは等しい」

が浮かび上ってくる．そして，実際は長さが異なっている!!

次に，平方数の問題に移ろう．

自然数の全体を $\boldsymbol{N}$，平方数の全体を $S=\{1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots\}$ とおく．議論の要点を整理すれば，次のようになろう．

（1）n に n^2 を対応させる写像は，$\boldsymbol{N}$ から S への全単射であるから，$\boldsymbol{N}$ と S との個数は等しい．

（2）S は $\boldsymbol{N}$ の真部分集合であるから，S より $\boldsymbol{N}$ の個数の方が多い．

さて，(2)の根拠になった原理は，

「全体は部分より大である」

という，ユークリッド『原論』の８番目の公理である．ガリレオの時代にあっては，あらゆる学問のなかで数学こそが最も厳密な学問であって，たとえ他の学問が修正されることがあったとしても，数学だけは決してその正しさがゆらぐことはありえないと信じられていた．そして，数学とはユークリッドの『原論』をさしていたから，その公理そのものといえる結論はまさに真理としか考えられないのであった．

(1)は，物の個数を比較する“直接法”にほかならない．しかし，２つの相反する命題を得て，事態はまさしくパラドックスのように思えてくる．

●ガリレオの結論　　それでは，『新科学対話』をのぞき，ガリレオがどのような結論を導いたかをみてみよう．

彼は，円周上の点全体も線分上の点全体も，さらに $\boldsymbol{N}$ も S も無限であることに注意をむける．そして，「“等しい”，“多い”，“少ない”という性質は，ただ有限量のみにあるのであって，無限量にはないのだ」と主張する．パラドキシカルなことが起きた原因は，「有限量にしか用いてはならない性質を，無限量に適用したからだ」と言い，「無限には大きな無限も小さな無限もなく，ただ無限があるだけだ」と断定する．さらに，「大小は無限の間だけでなく，無限量が有限量より大きいということさえできないのだ」と．なぜなら，「仮にその無限量が，たとえば100万より大としてみる．100万から上の方へだんだんと進んでゆけば，その“無限”に近づいてゆくことになる．ところが実はそうはなら

ない．大きな数に進んでゆけばゆくほど，1からその数までのなかに含まれる平方数の割合は小さくなる．そして平方数の数は，数の全体より少なくない．したがって，ますます無限から遠ざかることになる……」

ガリレオはペンを置いて大きく息をした．はじめ『新科学対話』を“6日間の会話”から構成する予定でいたが，ペンは遅々として進まない．しかし，彼は，自分がいま記述しているさまざまな事実が，たとえ単なるいとぐちにすぎないとはいえ，未知の世界への重要な第一歩であり，いつの日にか，自分の切り開いた道を通ってその奥にひそむ真理を解明する人が現われるものと信じていた．

ガリレオの死の翌年，ニュートン（Sir I. Newton, 1642−1727）が生まれ，力学を中心とする近代物理学は大きく進展するが，ガリレオが不信の念を表明した“無限”についてはおよそ2世紀半の年月を必要としたのである．ガリレオの死から230年の後，無限の世界の重い扉を開いたのは，ゲオルグ・カントル（G. Cantor, 1845−1918）であった．

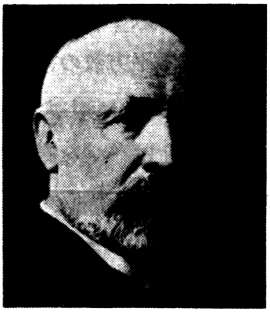
●カントルの挑戦　カントルは，フーリエ級数の収束問題から“集合”の概念に到達するや，この困難な無限の問題に真正面から取り組みはじめた．旧師クロネッカー（L. Kronecker, 1823−1891）をはじめ，当時の指導的数学者たちからの強い非難と反対のなかを，唯一の例外ともいえるデデキント（J. W. R. Dedekind, 1831−1916）に励まされながら，独力で無限の世界を解明してゆくのである．（ワイエルストラス（K. Weierstrass, 1815−1897）も多少好意的であった．）

その際に，カントルが無限を測るスケールとして積極的に採用したものは，ガリレオを悩ませた“全単射”そのものであった．

以下に，カントルに従って無限の世界にふみ入るが，ここで，概念の復習といくつかの定義を与えよう．

A, Bを集合とする．fがAからBへの全単射であるとは，Aのどの元にもfによってBの元がただ1つ定まり，どのBの元にもfによってうつる

A の元がただ1つ存在することであった．



カントル

A から B への全単射が存在するとき，“A と B とは**対等である**”とか“A と B の**濃度は等しい**”といい，それぞれ

$$A \sim B \qquad とか \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$$

と書く．

この関係 ～ は，

反射律　$A \sim A$

対称律　$A \sim B \rightarrow B \sim A$

推移律　$A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C$

をみたすから，同値関係になる．(反射律のときは恒等写像が，対称律のときは全単射の逆写像が，推移律のときは全単射の合成が，それぞれ全単射になることによる．)

すでにみたように，A と B が有限集合のとき，“A と B とが対等である”ことは“A と B が同じ個数の元をもつ”ことと同値であった．したがって，“対等”とは有限の世界における“同じ個数の元をもつ”という概念を無限の世界に拡張したものと考えることができる．

さきにあげたガリレオの話題において，我々は，小円周上の点全体と線分 BB′ 上の点全体とが対等であること，および，自然数の全体と平方数の全体とが対等であることを知った．いわば，両者はそれぞれ無限の世界のスケールでは，同じ個数の元をもつのである．

したがって，ユークリッド『原論』の公理「全体は部分より大である」は，無限の世界で反例をもったわけである．

§3　可算集合のいろいろ

●可算集合　　自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ と対等な集合を**可算（な）集合**という．可算集合の濃度を**可算濃度**といい，$\aleph_0$（アレフ・ゼロ）と書く．

集合 A を可算集合とし，$\boldsymbol{N}$ との1対1対応の一つを

$$f : \boldsymbol{N} \longrightarrow A$$

とする．f によって，自然数 n に対応する A の元を a_n とすれば，A の元すべてを

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$$

と一列に並べつくすことができる．いいかえると，自然数によって，そのすべての元に番号をつけることができる．そこで，可算集合のことを**可付番な集合**とよぶこともある．

自然数の全体は，n に番号 n をつければよいから，明らかに可算である．2 以上の自然数の全体は，1 つずつずらして $n+1$ に番号 n をつければよいから，これも可算である．また，0 以上の整数の全体も，0 に番号 1 を，1 に 2 を，n に番号 $n+1$ をつければよいから，同じく可算である．このことから，「可算集合から有限個の元を取り除いても，あるいは可算集合に有限個の元を加えても，可算である」ことがわかる．正の偶数の全体 $\{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$，正の奇数の全体 $\{1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots\}$，分子 1 の正の有理数の全体 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ なども，それぞれ，$2n$, $2n-1$, $\frac{1}{n}$ に番号 n をつければよいから，可算である．

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & \cdots, & n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2, & 4, & \cdots, & 2n, & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \cdots, & n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1, & 3, & 5, & \cdots, & 2n-1, & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \cdots, & n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \cdots, & \frac{1}{n}, & \cdots \end{array}$$

負の整数の全体も，整数の大小の順に番号をつけようとすれば，1 という番号をつけたとたんにそれより小さな数には番号がつかないのでうまくないのだが，逆に大きい方から順に並べてゆけば

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \cdots$$

となり，$-n$ には番号 n がつくから，やはり可算である．

では，整数の全体 $\boldsymbol{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ はどうであろうか．これは，大きい順にも小さい順にも，自然数で番号をつけることができないが，

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \cdots,\ n,\ -n,\ \cdots$$

と並べて左から番号をつけることができるから，やはり可算である．$\boldsymbol{Z}$が可算である証明をよくながめると次のことがわかる．

「A, B がともに可算ならば，和集合 $A \cup B$ も可算である」

実際にやってみると，次のようになる．Aの元を

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$$

と一列に並べておき，Bの元も

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots$$

と並べておいて，この2つの列から交互にとって新しい列

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots$$

を作る．そして，左から番号をつけてゆくが，すでにそれより前に同じものが現われていたら，その項は除いて番号をつけるものとする．このようにして和集合 $A \cup B$ の元すべてに番号をつけることができるのである．

なお，上のことに関してはヒルベルト（D. Hilbert, 1862−1943）が言ったといわれる次の話が有名である．

★ホテルの話　個室だけからできている普通のホテルが満室なら，もう客が来ても泊まれない．けれど，もし可算個の個室からなるホテルがあって満室だとしても，客が来れば泊まれる．1号室の客は2号室に，2号室の客は3号室に，…… と順次，隣りの部屋へ移ってもらい，その結果空いた1号室へ新しい客を泊めればよいからだ．これは後から来た客が2人でも，3人でも，……，n 人でも，いやそれどころか，ホテルの部屋数と同じだけ客が後から来ても泊まれるのである．

ところで，整数の次によく知っている数は有理数であろう．数直線を思い描けばわかるように，整数が直線上に規則正しくポツン，ポツンと並ぶのに対し，有理数はおびただしく多い．

0と1の間だけでも，$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$ と可算個ある．

$\frac{1}{2}$ と 1 の間にも，たとえば

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots$$

のように可算個あるし，$\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間にも

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \cdots,\ \frac{n}{2n+1},\ \cdots$$

$\frac{1}{4}$ と $\frac{1}{3}$ の間にも

$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{10},\ \cdots,\ \frac{n}{3n+1},\ \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\frac{1}{m+1}$ と $\frac{1}{m}$ の間にも

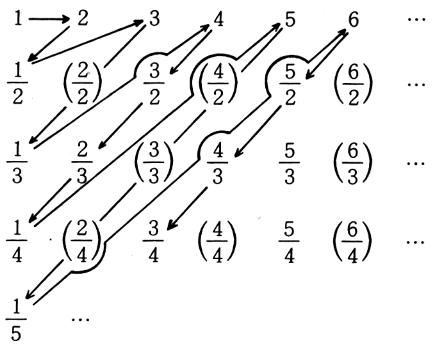
$$\frac{1}{m+1},\ \frac{2}{2m+1},\ \frac{3}{3m+1},\ \cdots,\ \frac{n}{mn+1},\ \cdots$$

と無数に有理数は入りこんでくる．それどころか，どんなに近い 2 つの有理数の間にも，無数に多くの有理数が入りこんでくる．このように，びっしり有理数がつまっていることを，有理数の**稠密**（ちゅうみつ）**性**とよぶ．

ところで，こんなにも多くの元からなる有理数の全体 $\boldsymbol{Q}$ は，自然数ではとても番号をつけきれないだろうと予想されるのであるが，1873年カントルは $\boldsymbol{Q}$ も可算であることを示した．それは次のようである．

まず，正の有理数の全体を考える．どの正の有理数も自然数 m, n を用い $\frac{n}{m}$ の形で書けるから，第 1 行目には分母が 1 の分数（すなわち自然数）を左から右に小さい順に $1, 2, 3, \cdots$ と並べ，第 2 行目には分母が 2 の分数を小さい方から $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \cdots$ と並べる．以下これをくりかえして，でき上った配列が，次のページの図としよう．

ところで，この配列の中には，同じ有理数が（たとえば $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\cdots$ のように）無数に現われるから，異なるものだけを拾い出すには，$\frac{n}{m}$ で既約分数だけを考えればよい．そこで，図における矢印の順に，既約分数だけを拾って自然数の番号をつけてゆけば，正のどの有理数にも番号がつく．したがって，可算であることがわかった．



正の有理数全体が可算であることがわかった今，負の有理数全体も可算であり，その和集合も可算だから，0をつけ加えて，$\boldsymbol{Q}$ が可算であることがわかる．

なお，$\boldsymbol{Q}$ が可算であることの証明をながめると，「集合 A, B が可算のとき，A の元と B の元の順序対（a, b）の全体（すなわち A と B の直積）

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

が可算である」ことがわかる．それは，A の元を

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

B の元を

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_m,\ \cdots$$

と番号づけ，有理数全体を並べた配列において $\dfrac{n}{m}$ の代りに（a_n, b_m）をおいて，矢印の順に自然数の番号をつければよいからである．ただし，今度は

$$(a_n, b_m) = (a_l, b_k) \longleftrightarrow n = l \text{ かつ } m = k$$

であるから，番号をとばす必要はない．

●代数的数　1辺の長さが1である正方形の対角線の長さを x とすれば，ピタゴラスの定理より

$$1^2 + 1^2 = x^2$$

が成り立ち，方程式

$$x^2 - 2 = 0$$

を得る．この方程式の根である $\sqrt{2}$ が有理数でないことは，高校で学んだところである．この $\sqrt{2}$ とか $\sqrt[3]{3}$ とか，$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ などのように，整数を係数とする方程式の根が，有理数の次になじみの深い数であろう．

実際に，$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ は，$x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ とおいて両辺を2乗すれば

$$x^2 = (\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3})(\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2$$
$$= 5-2\sqrt{6}$$
$$\therefore \quad x^2-5 = -2\sqrt{6}$$

ここで，再び両辺を2乗して整理すれば，

$$x^4-10x^2+1 = 0$$

となる．このことから，$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ は，整数を係数とする方程式の根になっていることがわかる．

一般に，整数を係数にもつ方程式

$$(*) \qquad a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n = 0$$

を整係数の**代数方程式**とよぶ．ここに，n は1以上で，a_0 は0でない．もし先頭の a_0 が負のときは，両辺に -1 を掛ければよいから，a_0 は正整数として一般性を失わない．代数方程式の根となる数を，**代数的数**とよぶ．特にそれが実数のとき**代数的実数**とよぶ．

どんな有理数 $\dfrac{n}{m}$ も，$mx-n=0$ が代数方程式であるから，有理数はすべて代数的数である．また，有理数でなくても，たとえば $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[7]{10}$, …のように，平方数でない n についての $\sqrt{n}$，立方数でない n についての $\sqrt[3]{n}$，……，などは代数的数である．さらに，2つの代数的数の和•差•積•商（分母は0以外）は代数的数である．

このように，有理数よりはるかに多い代数的数が存在するのである．そして，よく考えてみれば，小学校以来，円周率 π や自然対数の底 e など，ほんの少数の例外を除けば，お目にかかった数のほとんど全部の実数が代数的数なのである．

それも理由のないことではないのであって，代数的数でない実数が存在することは，1844年に，リューヴィル（J. Liouville, 1809−1882）によって初

めて証明されたことなのである．代数的数でない数を**超越数**とよぶ．

よく知っている具体的な数が，超越数であるか否かを判定するのは，一般に大変むずかしい．1873年になってエルミット（C. Hermite, 1822−1901）が e の超越数であることを，その9年後にリンデマン（C. L. F. Lindemann, 1852−1939）が円周率 π の超越数であることを証明した．1900年にパリの国際数学者会議でヒルベルトが23の問題を挙げ，今世紀の数学の目標としてかかげたのは有名であるが，その7番目の問題に“$2^{\sqrt{2}}$ の超越数であることの証明を与えること”が入っている．これは，1934年に，ゲルフォント（A. Gel'fond, 1906−1968）らによって，ようやく証明された．しかし，$e+\pi$ とか，オイラー定数 C

$$
\begin{aligned}
C &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)\\
&= 0.5772156649\cdots
\end{aligned}
$$

などについては，現在も超越数か否かはわかっていない．

それでは，具体的に知っているほとんどの数ともいえる代数的数は，どのくらい多いのであろうか．今度こそ，可算ではないだろう，と予想されるのである．

しかし，1873年に，カントルはこれもまた可算であることを証明してしまうのである．それは次のようにも説明できる．

まず，可算集合の直積は可算であったから，$\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{Z}$ は可算である．したがって，再び $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{Z}^2$ も，……，$\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{Z}^n$，…… と，$\boldsymbol{Z}$ の個数が有限である限り，つねに可算である．

さて，次数1の代数方程式は $a_0x+a_1=0$ の形だから，係数になる自然数と整数の順序対 (a_0, a_1) を定めればきまる．しかるに，$\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{Z}$ は可算だから，次数1の代数方程式は可算個しかない．同様に，次数2の代数方程式は，$a_0x^2+a_1x+a_2=0$ より，係数の3つの対 (a_0, a_1, a_2) を定めればきまるから，やはり可算である．これをくりかえせば，どんな n についても，n 次の代数方程式は可算であることがわかる．

ところでどんな n 次方程式も，根は高々 n 個しかないから，n 次の代数方程式から得られる代数的数も可算である．

そこで，1 次代数方程式から得られる代数的数を第 1 行目に，2 次代数方程式から得られる代数的数を第 2 行目に，……と有理数のときと同様に配列し，矢印の順に，重複するものはとばして，自然数の番号をつけてゆけば，代数的数の全体が可算であることがわかるのである．

なお，余談ではあるが，リンデマンの π の超越性証明によって，“円積問題”（§1 例 5 参照）が解決されたのである．これは，与えられた円の半径を単位としてとると，求める正方形の 1 辺は $\sqrt{\pi}$ と書ける．このとき，定木とコンパスを有限回用いて表わせる数は，ある特殊な形の代数的数と考えることができる．そこで，もし正方形の 1 辺が作図できれば，$\sqrt{\pi}$ したがって π は代数的数と考えられ，リンデマンの結果に反する．ゆえに，正方形の 1 辺は作図不可能とわかるのである．

●無限集合　最後に，有限でない集合と可算集合の関係にふれ，この§を終えることにしよう．有限個しか元を含まない集合を**有限集合**，有限集合でない集合を**無限集合**とよぶ．ここで，

「どんな無限集合も可算な部分集合を含む」

ことを注意しておこう．

A を無限集合とする．A は空集合ではないから，A の元を 1 つ取り出し a_1 と名づける．次に，A から a_1 を除いた $A-\{a_1\}$ を考えると，A は有限でないから，再び空でない．そこで，$A-\{a_1\}$ から元を 1 つ取り出し a_2 と名づける．同様に，$A-\{a_1, a_2\}$ から元を 1 つ取り出し a_3 と名づける．以下これをくりかえしてゆけば，A から $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ なる可算集合が取り出せる．

このことから，「無限集合は，それ自身の真部分集合と対等である」が得られるのである．後に，デデキントは自然数の概念を用いずに集合と写像だけを用いて無限集合を定義するとき，この性質をもつ集合を無限集合と名づ

けたのである.

§4 実数も可算か？

前の§でみたように，我々の知っているほとんどすべてといえる代数的数の集合ですら，自然数によって番号づけができることがわかってみると，次のような予想がでてくるのも，きわめて自然であろう.

予想「無限集合はすべて可算である」

しかし，カントルは実数の区間 $(0, 1)$ も反例と考えられることを示し，上の予想が誤りであることを証明した.

この説明には，実数の無限小数による表現を利用するので，次のことを注意しておこう.

「どの実数も無限小数を用いて表現することができる」

しかし，それが有限小数のとき，かつそのときだけは，表現は1通りに定まるとは限らない．たとえば，0.325 の場合には

$$0.325 = 0.3249999\cdots$$
$$= 0.3250000\cdots$$

のように，9が無限に続くものと，0が無限に続くものがある．こんごは，有限小数の表現として9が無限に続く表現を用いないことにするので，実数の無限小数による表現は一意に定まっていると考えてよい.

●カントルの対角線論法　開区間 $(0, 1)$ を I とおき，I が可算集合でないことを示す．カントルは，I のすべての元に自然数で番号をつけることができたとして，実は番号のついていない元，すなわち，反例を作ってみせるのである.

まず，番号のつけ方を

$$f: \boldsymbol{N} \longrightarrow I$$

とする．番号 n のつく I の元を $f(n)$ と書くと，実数はただ1つの無限小数表示をもつから，$f(n) = 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\cdots a_k^{(n)}\cdots$ と書ける．そこで，順番に

並べてゆくと，

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\cdots a_n^{(1)}\cdots \\
f(2) &= 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\cdots a_n^{(2)}\cdots \\
f(3) &= 0.a_1^{(3)}a_2^{(3)}a_3^{(3)}\cdots a_n^{(3)}\cdots \\
&\vdots \\
f(n) &= 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\cdots a_n^{(n)}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

となる．各自然数 n に対して，b_n を

$$
b_n = \begin{cases} 1 & (a_n^{(n)} \neq 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (a_n^{(n)} = 1 \text{ のとき}) \end{cases}
$$

となるようにえらび，無限小数

$$0.b_1b_2b_3\cdots$$

の定める実数を b とする．b は $0<b<1$ であり，しかも各 n について I の元 $f(n)$ と b とは小数第 n 位で異なるから $f(n)\neq b$ となる．これは，I のすべての元に番号をつけたはずだったのに，b にはいかなる番号もついていない，つまり，反例ができたわけである．

この数え忘れの b を1番目とし，あとは番号を1つずつずらして番号づけすれば，今度こそ I の元全体に番号がつくような気がするかもしれないが，それはダメである．I の全体に自然数による番号づけが存在したとすると，必ず数え忘れが作れるので，最初の仮定に矛盾するのである．ゆえに，I は可算ではない．

この証明方法は，反例の作り方からわかるように，“対角線”を利用しているので，**カントルの対角線論法**とよばれる．

なお，上の証明では，無限小数

$$0.b_1b_2b_3\cdots$$

が1つの実数を定めることを用いた．これは，数直線を思い描くとき，

$$0.b_1,\ 0.b_1b_2,\ 0.b_1b_2b_3,\ \cdots,\ 0.b_1b_2b_3\cdots b_n,\ \cdots$$

が単調に増大する有理数の列で，明らかに 0.3 をこえないから，1つの実数

に収束すると思えることによる．この判断の根拠となった命題

「単調に増加する実数列が，上に有界のときは，収束する」

を，**実数の連続性**とよぶ．

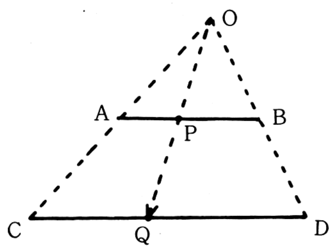
●実数連続体　ところで，開区間 I と対等になる集合にはどんなものがあるのだろうか．

まず，当然予想されることとして，1点を追加しても大きさは変わらないであろうから，

$$(0,1) \sim (0,1] \sim [0,1) \sim [0,1]$$

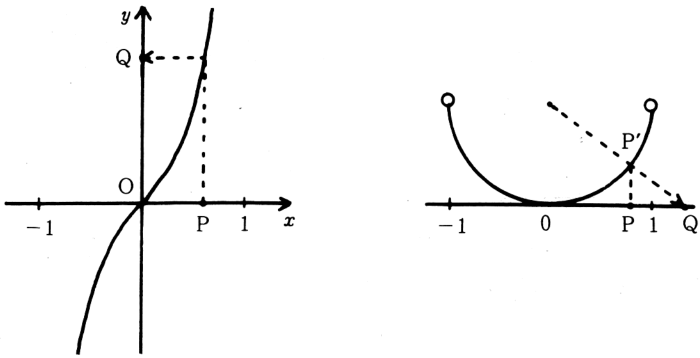
は成り立つであろう．たとえば，$(0,1] \sim (0,1)$ は，$(0,1]$ の $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ をそれぞれ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n+1}, \cdots$ に対応させ，それ以外の x には x を対応させる写像が，全単射であることによるのである．

次に，長さの異なる2つの線分はどうであろうか．当然，長さの長い方がより多くの点を含んでいる気がするが……．しかし，これは，下の図のように線分 AB 上の点 P に対し，OP の延長と線分 CD との交点Qを対応させる写像を考えれば全単射であるから，長さの異なる2つの線分は対等になってしまう．これから，$a<b, c<d$ のとき，$(a,b) \sim (c,d)$ がわかる．



ここで，我々は§2におけるガリレオの“円周上の点全体と対等な線分”を思いだす．円周と線分は対等であったが，長さは異なっていたのであった．

それでは，無限に長い直線（実数全体）と線分とはどうだろうか，はたして対等であろうか．これもまた，対等なのである．証明は簡単で，$f(x)=\tan(\pi x/2)$ なる $(-1,1)$ から $\boldsymbol{R}$ への全単射を用いればよい．あるいは，次ページの右上の図のように，原点で数直線に接する半円周（半径1とする）を利用して，PにQを対応させる対応を考えてもよい．ここにQは，Pで直線に立てた垂線と半円との交点P′と，中心とを結ぶ直線と数直線との交点で



ある．明らかに，この対応は全単射である．

かくして，$\boldsymbol{R}$は実数のいかなる区間とも対等であることがわかった．そして，$\boldsymbol{R}$は可算でない無限集合なのである．我々は，$\boldsymbol{R}$の濃度を**連続体の濃度**とよび，$\aleph$（アレフ）で表わす．

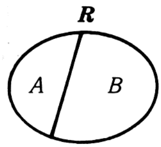
●超越数　代数的数でない数を超越数とよび，その存在を初めて証明したのがリューヴィルであることは，前に述べたとおりである．リューヴィルは，任意の２つの実数の間に無数に多くの超越数を構成してみせた．

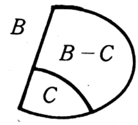
それでは，超越数はどのくらいあるのだろうか？　カントルは1874年，超越数の全体が非可算であることを，ただの１つも具体的な超越数を構成することなく，証明してしまった．前年にエルミットが与えたeの超越性の純整数論的なむずかしい証明に比べて，カントルはあっけないほど簡単にリューヴィルの別証明を与えたのである．その証明とは，次の３行である．

代数的数の全体をA，超越数の全体をBとすれば，Aは可算であったから，もしBも可算なら　$A \cup B = \boldsymbol{R}$　より$\boldsymbol{R}$も可算となって矛盾する．したがって，Bは非可算である．

なんと，その存在が多くは知られていない超越数は，非可算個もあったのである．しかも，その結果として，実数連続体と同じだけあることもわかってしまうのである．なぜなら，Bは非可算だから，可算部分集合Cを一部分として含み，

$$B=(B-C)\cup C.$$





しかるに，CもAも可算だから$C\cup A$も可算となり，Cから$C\cup A$への全単射がある．これを利用すれば，$(B-C)\cup C$から$(B-C)\cup(C\cup A)$への全単射が作れるから，Bと$B\cup A=\boldsymbol{R}$とが対等となる．よって，超越数全体は$\boldsymbol{R}$と同じだけある．

なお，いまの証明において，Aを有理数の全体，Bを無理数の全体とすれば，Bも非可算となるから全く同様に，無理数全体も$\boldsymbol{R}$と同じだけあることがわかる．

さて，カントルの証明は，Bが可算であると仮定して矛盾を導くことによって，超越数が非可算個存在することを証明したもので，具体的な超越数の構成方法については何らの示唆をも与えない．後年，このような証明はごく普通となり「純粋存在証明」とよばれるようになったが，当時の数学界には大きなショックをひきおこした．そして，クロネッカーをはじめとする多くの数学者たちは，カントルの証明に対し厳しい批判をよせたのである．

§5　*n* 次元ユークリッド空間

●またまた反例　実数連続体が非可算であることを証明したカントルは，次のような予想をする．

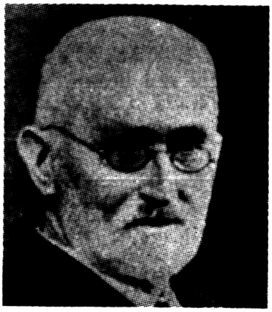
予想「点集合としての平面の濃度は直線の濃度より高く，3次元空間の濃度は平面の濃度より高く，…….次元が上がるたびに，空間の濃度は高くなってゆくであろう」

そして彼は，まず直線と平面の問題に取り組み，直線よりはとてつもなく多い点をもつ平面へは，直線からの全単射は存在しないということ，すなわち，

予想「$\boldsymbol{R}$から$\boldsymbol{R}^2$へのどんな写像も，全単射ではない」

を証明しようとする．

しかし，3年間もの努力の末にカントルがたどりついたのは，予想もしな


デデキント

かった反例の発見であった．デデキントへの1877年の手紙のなかで，彼は書く．

"Je le vois, mais je ne le crois pas."

（わかることはわかる，でも信じられない．）

以下に，カントルの証明の概要を述べることにしよう．

区間 $[0,1)$ を I とおけば，$\boldsymbol{R} \sim I$ であったから，

$$I^2 = I \times I$$
$$= \{(x, y) \mid 0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1\}$$

とおくとき，I と I^2 の間に全単射を定義できれば，

$$\boldsymbol{R} \sim \boldsymbol{R}^2$$

がいえることになる．したがって，I^2 から I への全単射を定義することにしよう．ただし，I の元の無限小数による表現を1通りにするため，9が無限に続く表現はやめたことに注意する．

$I^2 \sim I$ の証明　I^2 の各元 (a, b) に対し，その無限小数展開をそれぞれ

$$a = 0.a_1a_2a_3\cdots$$
$$b = 0.b_1b_2b_3\cdots$$

とし，これから交互に並べてできる

$$0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$$

なる無限小数で表わせる数を対応させる．すると，この写像は全単射になる．

（証明終）

ところで，カントルのこの証明には，デデキントがすぐ指摘したように，小さなミスがあった．それは，ここに定義された写像について，「写像が全射である」という命題，すなわち「どの I の元も，I^2 のある元をこの写像でうつした像となる」は反例をもつのである．それは，I の元

$$c = 0.111919191\cdots$$

でよい．c の原像は

$$a = 0.1111\cdots$$

$$b = 0.1999\cdots$$

できまる点 (a, b) であろう．しかし表現の一意性より，b は $0.20000\cdots$ と書かねばならないから，(a, b) に対応する点は

$$0.12101010\cdots$$

となって c とは異なる．すなわち c は原像をもたない．（反例終）

カントルの証明を修正するには，たとえば次のようにすればよい．a, b の無限小数展開を左から順次区切って，各区切りが 9 以外の 0 から 8 までの数字 a_i か，$99\cdots9a_i$（a_i は初めて 9 でない数字）となるようにする．そして，a の区切りと b の区切りとを交互に並べてゆく．たとえば，

$$a = 0.30929949\cdots$$

$$b = 0.269019\cdots$$

のとき，a, b の区切りはそれぞれ

$$3,\ 0,\ 92,\ 994,\ \cdots$$

$$2,\ 6,\ 90,\ 1,\ \cdots$$

であるから，対応する数は

$$0.3\vdots 2\vdots 0\vdots 6\vdots 92\vdots 90\vdots 994\vdots 1\vdots\cdots$$

とするのである．

この対応は，今度は全単射になっている．もし $(a, b) \neq (a', b')$ ならば，$a \neq a'$ か $b \neq b'$ のいずれかが成り立つ．よって，表現の一意性より，a と a'，b と b' の表現の何番目かに異なる数字が現われる．したがって，(a, b) に対応する点と (a', b') に対応する点も，その異なった数字の現われるところで異なる．

●次元の崩壊　　$\boldsymbol{R} \sim \boldsymbol{R}^2$ を証明してしまうと，全く同様にして

$$\boldsymbol{R} \sim \boldsymbol{R}^2 \sim \boldsymbol{R}^3 \sim \cdots \sim \boldsymbol{R}^n \sim \cdots$$

が成立する．線分と正方形，正方形と立方体，…… と対等になってゆき，その結果，n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ 内の幾何学的な図形がすべて対等となってしまう．「次元の概念はその根拠を失った」とカントルはデデキントへ

の手紙に書きしるしているという．しかし，デデキントはその本質をすぐに理解した．対等であるという概念は，近さといったような位相的な概念をはじめとしてさまざまな概念をすてさり，ただただ集合を点の集まりとみて，全単射があるという分類をしているにすぎない．

実際，さきほど $I\sim I^2$ の証明で定義した I^2 から I への全単射の逆写像は不連続な関数だったのである．I 上で非常に近い

$$0.500000000\cdots \qquad と \qquad 0.4999990000\cdots$$

は，それぞれ I^2 上の点

$$(0.5, 0) \qquad と \qquad (0.499, 0.999)$$

に対応し，この2点は上下にはっきりと分かれており，9をふやしてゆけば I 上の2点は限りなく近づくのに，その像は離れたままである．

そして，事実，連続な全単射で逆も連続なもの（位相写像）は，線分，正方形，立方体，…… の間には存在しないことがいえるのである．けれども単射であることを要求しなければ，ペアノ曲線のように，線分から正方形への連続な全射は作ることができる．

§6 無限を比べる

●大小の定義　さて，$\boldsymbol{N}$ や $\boldsymbol{R}$ のように大きさの異なる無限集合が存在することがわかってみると，2つの濃度を比べてみたくなる．§2で述べたように，ガリレオは，無限についての大小も，さらに有限と無限の間の大小さえも考えるのに反対した．それでは，タブーを破り無限の世界を切り開いたカントルは，どのように大小関係を定義したのだろうか？

それをみる前に，カントルに代わって，我々がそれを試みてみよう．

手がかりは，有限集合の元の個数の大小だけだから，その分析から始めることにしよう．

A は m 個，B は n 個の元をもつ集合とする．まず，$m<n$ とする．A の元を $a_1, a_2, \cdots, a_m$ と並べ，B から $a_1, a_2, \cdots, a_m$ の相手を1つずつ異なるようにとり $b_1, b_2, \cdots, b_m$ とする．そこで，

$$B_1 = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$$

とおけば，$A \sim B_1$ である．ところで，$m < n$ より B の元で B_1 に入らない元があるので，$B_1 \subsetneq B$ となる．ゆえに

（1）　B の真部分集合で，A と対等なものがある

が成り立つ．

逆に，（1）で存在する真部分集合 B_1 をとれば，B_1 は A と同数の元を含むから m 個．さらに $B_1 \subsetneq B$ より，B は少なくとも $m+1$ 個を含む．よって，$m < n$ が成り立つ．

このように，A, B が有限集合なら，A の個数が B の個数より小さいための必要十分条件は，B が A と対等な真部分集合を含むことである．これは，A が有限集合で B が無限集合のときも，A の個数は B の個数より小さいと定義すれば，やはり成り立つ．

そこで，一般の A, B について“A の濃度が B の濃度より小さい”という関係を“B の真部分集合で，A と対等なものがあること”と定義してみよう．

ところで，普通，大小関係 $<$ によって，どのような性質を期待しているのであろうか．$<$ が順序関係であることは，少なくともほしい性質である．ちなみに，関係 $<$ が順序であるとは，

非反射律　　$\neg(a < a)$

推移律　　$a < b,\ b < c \ \rightarrow\ a < c$

の２つの性質をみたすことであった．

ところが，我々の試みは，ガリレオによる反例で挫折する．それは，A, B を $\boldsymbol{N}$ とし，平方数の全体を S とおけば，

$$\boldsymbol{N} \sim S \quad \text{かつ} \quad S \subsetneq \boldsymbol{N}$$

となるから，$\boldsymbol{N}$ の濃度 $\aleph_0$ について $\aleph_0 < \aleph_0$ が成り立ってしまい，期待に反するのである．

ところで，この反例によれば，$A \sim B_1$ かつ $B_1 \subsetneq B$ となる B_1 があっても，A と B の濃度が等しくなる場合があるわけだから，まず，“A の濃度は B の濃度以下である”を

1）　B の部分集合で，A と対等なものがある

で定義したらどうであろうか．こう定義すると明らかにこの関係は，反射律と推移律をみたすので，十分期待できるのである．なお，上の条件 1）は，

1′）　A から B への単射がある

とも

1″）　B から A への全射がある

ともいいかえられる．

次に，“A の濃度が B の濃度より小さい”を

1）　B の部分集合で，A と対等なものがある

2）　A と B とは対等でない

の 2 つの条件をみたすこと，と定義する．これを写像の言葉でいいかえれば，

1′）　A から B への単射がある

2′）　A から B への全単射はない

となる．

“A の濃度が B の濃度より小さい”ことを，“B の濃度は A の濃度より大きい”ともいい，

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$$

と書く．また，

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \quad \text{または} \quad \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$$

であることを

$$\overline{\overline{A}} \leqq \overline{\overline{B}}$$

と書くことにすれば，これはさきにあげた条件 1），すなわち，“A の濃度は B の濃度以下である”と同値になる．

なお，後にふれるが，ベルンシュタインの定理（§7 参照）があれば，“A の濃度は B の濃度より小さい”は

1′）　A から B への単射がある

2″）　A から B への全射はない

と同値になるのである．これが，カントルの与えた定義であった．

●大小の性質　まず，上で定義した濃度の大小関係が，A, B が有限集合でその濃度が m, n のとき，（0以上の整数としての）普通の大小関係 $m < n$ と一致していることに注意する．したがって，濃度の大小関係は普通の大小関係の一般化であるから，濃度として

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < n+1 < \cdots$$

が成り立つ．

次に，自然数 n と可算濃度との関係は，集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ と $\boldsymbol{N}$ とを考えれば，条件 1′), 2′) をみたすから

$$n < \aleph_0$$

が成り立つ．

さて，可算濃度 $\aleph_0$ と連続濃度 $\aleph$ とは，§4 で示したように $\aleph_0 \neq \aleph$ であったし，$\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{R}$ より

$$\aleph_0 < \aleph$$

が成り立つ．

なお，どんな無限集合 A も必ず可算集合を部分集合として含むから，

$$\aleph_0 \leqq \overline{\overline{A}}$$

が成り立つのである．

●連続体問題　カントルは，さまざまな実数の部分集合が，可算濃度か連続濃度かのいずれかになっていることに着目し，この2つの濃度の間に他の濃度が存在しうるかという問題を考えはじめる．そして，整列集合なる概念を発見し，濃度に関する詳細な研究をおし進めてゆく．そのなかでこの問題は，次のように定式化される．

連続体仮説「連続体の濃度 $\aleph$ は可算濃度 $\aleph_0$ の次の濃度 $\aleph_1$ である」

この問題は大変な難問で，これを解くためにカントルは悪戦苦闘する．その上，クロネッカーらのカントルの集合論そのものへの激しい非難が重なり，ついに1884年，神経症にかかってしまう．

カントルが再び集合論に興味を取りもどすのは，1887年ごろのことである．

§7　無限が無限に！

前の§でみたように，無限集合には可算濃度 $\aleph_0$ をもつものと連続濃度 $\aleph$ をもつものがあり，しかも

$$\aleph_0 < \aleph$$

が成り立つことまでわかった．そして，

$$\boldsymbol{R} \sim \boldsymbol{R}^2 \sim \cdots \sim \boldsymbol{R}^n \sim \cdots$$

とわかった今，より大きな濃度をもつ無限はないように思える．はたして「連続濃度は最大の濃度である」のだろうか，それとも「いくらでも大きな無限がある」のだろうか．

この問題にたちむかったカントルは，ここでも天才を発揮する．すなわち，ベキ集合に着目することによって，一挙にこの問題を解決するのである．

●ベキ集合　　集合 A が与えられたとき，A の部分集合の全体は１つの集合となる．これを A の**ベキ集合**といい，$\mathscr{P}(A)$ で表わす．すなわち，

$$X \subseteq A \quad \longleftrightarrow \quad X \in \mathscr{P}(A)$$

である．

たとえば，$A = \{1, 2, 3\}$ としよう．$X \subseteq A$ とすると，X に 1, 2, 3 が入るか否かが，各々について独立に判定できるから，$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ 通りの X のえらび方がある．実際，$\mathscr{P}(A)$ は具体的に

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

と書けるのである．

一般に A が n 個の元をもつ有限集合のとき，A のベキ集合は 2^n 個の元をもつ．2^n は n についての指数関数だから，A の元の数 n が大きくなれば，それに応じてベキ集合は急激に大きくなってゆく．

そして，1890 年，カントルはベキ集合の濃度に関する有名な次の定理を発見する．

カントルの定理　A を任意の集合とすると，A のベキ集合の濃度は A の濃

度よりも大きい．すなわち，

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}.$$

証明　1)　Aから$\mathscr{P}(A)$への単射の存在．

Aの各元aに対し$\mathscr{P}(A)$の元$\{a\}$を対応させる写像は単射である．なぜなら，$\{a\}=\{b\}$なら$a=b$だから．

2)　Aから$\mathscr{P}(A)$への全単射が存在しないこと．

全射が存在しないことを示せば十分である．仮に，全射が存在したとして，fと名づける．Aの元についての条件$x\notin f(x)$を考える．たとえば，$f(a_1)=\varnothing$となるa_1については真であり，Aが空でなければ$f(a_2)=A$となるa_2については偽である．そこで，条件$x\notin f(x)$をみたすAの元の全体をBとおく．明らかに，

$$x\in B \quad\leftrightarrow\quad x\in A \text{ かつ } x\notin f(x)$$

である．

BはAの部分集合で，fは全射だから$f(b)=B$となるAの元bがある．したがって，上式を書きなおすと

$$x\in f(b) \quad\leftrightarrow\quad x\in A \text{ かつ } x\notin f(x)$$

となる．

さて，xはAの任意の元でよかったから，xとしてbをとると

$$b\in f(b) \quad\leftrightarrow\quad b\in A \text{ かつ } b\notin f(b).$$

しかるに$b\in A$であるから

$$(*)\qquad b\in f(b) \quad\leftrightarrow\quad b\notin f(b)$$

となる．

仮に$b\in f(b)$なら，($*$)より$b\notin f(b)$となり，$b\in f(b)$かつ$b\notin f(b)$となって矛盾する．ゆえに仮定は誤りで$b\notin f(b)$．すると，再び($*$)より$b\in f(b)$となり，矛盾する．

ゆえに，最初の仮定“全射が存在する”が偽であった．（証明終）

この証明は一種の対角線論法になっているので，読者は吟味してみていただきたい．

カントルの定理によって，無限の世界はその相貌を見せはじめる．$\boldsymbol{N}$から始め，$\mathscr{P}(\boldsymbol{N})$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\boldsymbol{N}))$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\boldsymbol{N})))$, …… とくりかえしベキ集合を作ってゆけば，いくらでも大きな濃度をもつことになるのである．ガリレオがたった1つと信じた無限の世界は，有限の世界と同様に，大きさの異なる無数の無限が存在し，しかも最大の無限も存在しない．カントルは，ついに無限の世界の秘奥をかいまみたと信じたにちがいない．

そうなると，連続濃度はこの列のいずれかと一致するのだろうか．それとも，比較できないのであろうか？ はたして，この無限の世界を支配している原理は何なのか？ どのような秩序が存在するのか．次々にわいてくる疑問に，カントルの心はおどったにちがいない．

我々は，まず $\mathscr{P}(\boldsymbol{N})$ と $\boldsymbol{R}$ との関係を調べることから始めるが，そのための準備として，実数の2進法による表現の復習から始めよう．

● n 進法による表現　実数を表現するのに，普通は10進法を用いるが，表現の方法はこれに限るわけではない．1より大きな正整数 n をきめれば，n 進法による表現ができる．もし n が10より大きければ，各位の数を表わすのに0から9までの他に新しい数字（字母）を必要とし面倒だから，まず n が5の場合に説明しよう．このときは，必要な数字は0, 1, 2, 3, 4の5つである．

数直線上に0と1がある．0から1までの線分を右に2, 3, 4, 5倍にのばして，それぞれ2, 3, 4, 10と目盛をふる．次に，0から目盛10までの線分を右に2, 3, 4, 5倍にのばし，それぞれ20, 30, 40, 100と目盛をふる．10と20の間を5等分し，分点に左から11, 12, 13, 14とふるのはいうまでもない．次に小数のときも同様で，0から1までの線分を5等分して，その分点に左から0.1, 0.2, 0.3, 0.4と目盛をふる．さらに0と0.1の間を5等分し，その分点に左から0.01, 0.02, 0.03, 0.04と目盛をふる．また，0.1と0.2の間を5等分し，その分点に左から0.11, 0.12, 0.13, 0.14と目盛をふる．以下これをくりかえしてゆくのが5進法である．

数直線上のどの数も，5進法の有限小数か無限小数で書ける．ある数が有

限小数になるのは，いずれかの目盛と一致するときである．

さて，ある数が有限小数ではないとすると，その数を含む区間，たとえば，[3, 4] がある．次にそれを 5 等分した小区間の中に，再びその数を含むものがある．それを [3.1, 3.2] としよう．またこれを 5 等分した小区間の中に含むものがある．それを [3.14, 3.2] としよう．3.2 は 3.20 と同じである．これを 5 等分し [3.140, 3.141] に入っているとする．以下これをくりかえし，区間の左端の数を順次並べると

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.140,\ 3.1402,\ \cdots$$

と単調に増加する数列ができ，この数列の極限として，最初の数は表わせる．すなわち，無限小数 3.1402… で表わせる．

なお，3.2 のような有限小数のとき，その数を右端として含む区間ばかりを考えれば，

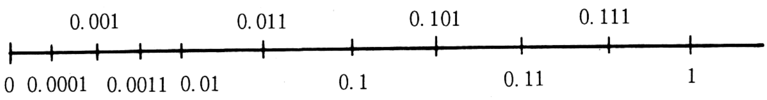
$$3.144444\cdots$$

が得られ，その数を左端として含む区間を考えれば

$$3.200000\cdots$$

となるのであった．

次に，我々の目標である 2 進法を説明しよう．2 進法の整数表現はよく知られているから，小数の場合だけを説明しよう．数字としては 0 と 1 だけを用いる．区間 [0, 1] を 2 等分して，中点に 0.1 をふる．[0, 0.1] の中点には 0.01，[0.1, 1] の中点には 0.11 をふる．次に，[0, 0.01]，[0.01, 0.1]，[0.1, 0.11]，[0.11, 1] の中点に，それぞれ 0.001，0.011，0.101，0.111 と，目盛をふる．これをくりかえせば，次のような 2 進法の目盛がつく．



実数が 2 進法の無限小数で書けること，有限小数が 2 通りの表現

$$\begin{aligned} 0.1 &= 0.10000\cdots \\ &= 0.01111\cdots \end{aligned}$$

をもつことも同様であるが，表現の一意性のため 1 が無限に続く表現はやめることにする．

●$\boldsymbol{N}$**のベキ集合と** $\boldsymbol{R}$　まず，$\mathscr{P}(\boldsymbol{N})$ が 0 と 1 からなる数列の全体（それを F とする）と対等であることに注意しよう．それは，$\boldsymbol{N}$ の部分集合 A に対し，A の特性関数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

を対応させれば，その対応は全単射となるからである．

それでは，F の濃度はどうなるのであろうか．実は，

$$F \sim [0, 1)$$

がいえるのである．それを以下にみてみよう．

F の元である 0 と 1 の数列のうち，あるところから先ですべて 1 をとるものの全体を，F_1 とおく．1 だけからなる数列には 0 を，それ以外の F_1 の元には，それは必ず $a_1, \cdots, a_n, 0, 1, 1, 1, 1, \cdots$ $(n \geqq 0)$ という形をしているから，2 進法の自然数 $1a_1 \cdots a_n$ を対応させる写像を考えれば，これは全単射であるから，F_1 と 0 以上の整数の全体とは対等になる．よって，F_1 は可算である．

$F - F_1$ の各元 f に対して，その第 n 項を a_n とし，無限小数

$$0.a_1a_2a_3\cdots$$

を対応させる．$[0, 1)$ の 2 進法による無限小数の一意性より，この写像は全単射となり

$$(F - F_1) \sim [0, 1)$$

となる．

$F - F_1$ は無限で，F_1 は可算だから

$$F = (F - F_1) \cup F_1 \sim (F - F_1)$$

よって，$F \sim [0, 1)$ がいえる．

この結果と $\mathscr{P}(\boldsymbol{N}) \sim F$ および $[0, 1) \sim \boldsymbol{R}$ とから，$\mathscr{P}(\boldsymbol{N}) \sim \boldsymbol{R}$ がわかるのである．

●$\boldsymbol{R}$のベキ集合　$\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$ がどのような集合かは，上の結果によれば，$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\boldsymbol{N}))$ と対等になることでわかるのであるが，これと，実数で定義された実数値関数の全体 $\mathscr{F}$ とが対等であることを注意しておくのは，むだではあるまい．

関数 f に，そのグラフ $\Gamma_f=\{(x, f(x)) \mid x\in\boldsymbol{R}\}$ を対応させると，この写像は $\mathscr{F}$ からグラフの全体への全単射である．ところでどのグラフも $\Gamma_f\subseteq \boldsymbol{R}^2$ であるから，この写像は $\mathscr{F}$ から $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^2)$ への単射でもある．しかるに $\boldsymbol{R}^2\sim\boldsymbol{R}$ であったから，$\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^2)\sim\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$ で

(＊)
$$\overline{\overline{\mathscr{F}}} \leqq \overline{\overline{\mathscr{P}(\boldsymbol{R})}}$$

となるのである．

一方，$\mathscr{F}$ は，$\boldsymbol{R}$ 上で定義され値 0, 1 をとる関数の全体（すなわち，$\boldsymbol{R}$ の部分集合の特性関数の全体）を部分集合として含んでいる．これを $\mathscr{F}_1$ と書こう．すると，$\boldsymbol{R}$ の部分集合とその特性関数との対応は全単射であったから，

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{R})\sim\mathscr{F}_1$$

となり

(＊＊)
$$\overline{\overline{\mathscr{P}(\boldsymbol{R})}} = \overline{\overline{\mathscr{F}_1}} \leqq \overline{\overline{\mathscr{F}}}$$

が成り立つ．

ここで，もし，反対称律

$$\overline{\overline{A}} \leqq \overline{\overline{B}},\ \overline{\overline{B}} \leqq \overline{\overline{A}} \quad\rightarrow\quad \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$$

があれば，(＊), (＊＊) より $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$ と $\mathscr{F}$ とは対等になるのである．

カントルはこの反対称律が成り立つことを予想したが，その証明は1897年のベルンシュタイン（S. N. Bernstein, 1880－1968）まで待たねばならなかった．そして，この**ベルンシュタインの定理**によって，§6 で我々が与えた濃度の関係 ≦ は，反射律，反対称律，推移律の 3 つをみたし，順序関係となったのである．これを大小関係 < の言葉でいいかえれば，非反射律と推移律をみたすことになり順序関係となったのである．

さらに，1904年，ツェルメロ（E. Zermelo, 1871－1953）が，これもカントルが予想した

比較可能定理「$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$ のいずれか1つが成り立つ」

を証明したことによって，無限の世界に秩序が存在することがはっきりしてきたのであった．なお，ツェルメロは，これを，

整列可能定理「どんな集合も，その上に適当に順序を定義して整列集合にできる」


ツェルメロ

から導いたのであるが，選択公理を導入して証明したのであった．この公理は，それ以前にも，たとえば“無限集合が可算集合を含む”などのように，解析学や集合論で無意識に用いられていたのであるが，整列可能定理などの予想もしなかった結果を導いたことや推論方式がみなれぬものであったことなどから，この公理の信頼性をめぐって再び数学者の間に激しい論争をまきおこしたのである．

§8 無限の彼方へ

●集合論のパラドックス　ベキ集合の濃度に関する定理を発見した後，カントルは妙なことに気づく．それは，1899年のデデキントへの手紙のなかで述べられている．

“集合とは物の集まりである．したがって，集合を全部集めたものを V とすれば，V もまた集合になるだろう．すると，$\mathscr{P}(V)$ も集合となり $\overline{\overline{V}}<\overline{\overline{\mathscr{P}(V)}}$ が成り立つ．ところが V の部分集合はすべて V の元だから，$\mathscr{P}(V)\subseteq V$ となる．よって，$\overline{\overline{\mathscr{P}(V)}}\leqq\overline{\overline{V}}$．これは $\overline{\overline{V}}<\overline{\overline{V}}$ を導くから，矛盾する!!”

このような逆理は，1897年にブラリ・フォルティ(C. Burali-Forti, 1861—1931)によってすでに指摘されていたが，その最たるものがラッセル(B. A. Russell, 1872—1970)によるパラドックスで，これを整理してみれば，カントルの定理と瓜二つなのである．

★ラッセルのパラドックス 条件 $x \notin x$ をみたす集合の全体を A とおく．定義より

$$X \in A \quad \leftrightarrow \quad X \notin X$$

が成り立つ．A も集合だから，上の X として特に A をとれば

$$A \in A \quad \leftrightarrow \quad A \notin A$$

となって矛盾する．

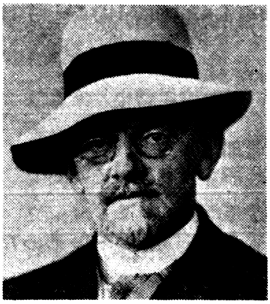
このころ，クロネッカーをはじめ旧世代の指導的な数学者たちの苛烈な集合論攻撃にもかかわらず，デデキントによる数の概念の基礎づけ（有理数の切断による無理数の定義，それに基づく実数論，および集合と写像による自然数論），古典数学に集合論的手法を導入して得られた実り多い成果，および若い世代の指導者ヒルベルトらの強い支持などが相まって，集合論は次第に数学者に認知され，現代数学の基礎としての地位を確立しつつあった．

まさにそのようなとき，ラッセルのパラドックスやリシャールのパラドックスの発見は，“集合”概念や“条件”などの論理的な概念の濫用に対する強い反省をうながし，ひいては数学で用いる“推論”をはじめ数学の基礎の部分を再吟味する必要が生じた．当初，数学の辺境に起きたと思われた破綻は，数学の王国の基礎をゆるがすほどの，重大な問題であることがはっきりしてきたのである．

この危機から数学を救おうと真剣に取り組んだ人々のなかに，ヒルベルト，ラッセル，ブロウエル（L. E. J. Brouwer, 1881－1966）らがいる．そして，ヒルベルトのプログラムが提出され，証明論が生まれ，**数学基礎論**という分野が発生する…….

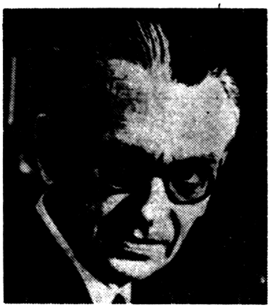
連続体問題の解決のための努力もむくわれず，パラドックスは発生し……という苦しい境遇のなかで，苦悩するカントルは，1905年再び神経症にかかり，1918年1月6日ハルレの病院で亡くなった．

そして，その間にも集合論は，さまざまな概念を構成するための手段とし



←ヒルベルト

ゲーデル→



て，また数学のための論理そのものとして，数学者の間に広く深く浸透し，現代数学の基礎としてゆるぎない地位を確立していった．

●公理的集合論へ　しかし，数学に必要な集合はすべて含み，しかもパラドックスを生じないような集合の定義を与えることはできなかった．そのため，対症療法として，集合の直接的な定義を与えずに，望ましい性質を公理としてかかげ，その公理をみたすものとして集合の範囲を外から規定する方法がとられた．これが**公理的集合論**であり，ツェルメロ，フレンケル（A. A. Fraenkel, 1891－1965）らによって作り上げられた．これは，さらにフォン・ノイマン（J. von Neumann, 1903－1957）が整備し形式化して，現在はZF集合論（ツェルメロ-フレンケル集合論）とよばれる．その他にベルナイス（P. Bernays, 1888－1977）とゲーデル（K. Gödel, 1906－1978）によるノイマンの形式化の変形があり，BG集合論（ベルナイス-ゲーデル集合論）とよばれるが，両者は本質的には同じものである．

ある公理系からどのように推論を重ねても矛盾を導くことができないとき，その公理系は“**無矛盾**である”といわれる．

1938年，ゲーデルは

「公理系ZFが無矛盾ならば，ZFに選択公理と連続体仮説をつけ加えても，やはり無矛盾である」

を証明し，公理系ZFが十分信頼できるものならば，選択公理や連続体仮説も同程度に信頼できることを示した．

そして，それから24年後の1962年，コーエン（P. J. Cohen, 1934－ ）は

「公理系 ZF が無矛盾ならば，

ZF に“選択公理の否定”を追加しても，

ZF に選択公理と“連続体仮説の否定”を追加しても，

やはり無矛盾である」

を証明した．コーエンは，ZF の公理をすべて満足する集合の世界があったとして，ZF と“選択公理の否定”をみたす世界と，ZF と選択公理と“連続体仮説の否定”をみたす世界を作り上げたわけである．このことは，“ZF が無矛盾である”という仮定のもとに

予想「ZF から選択公理が導ける」

と

予想「ZF と選択公理とから，連続体仮説が導ける」

という命題の反例を作ったことを意味する．

しかし，これは現代集合論の話題であって，数学のいわゆる基礎的な範囲からは逸脱しているであろう．

反例の価値は，結局，それ自身にあるわけではない．それは，ガリレオが夜空にながめた惑星の輝きに似ている．太陽の光がなかったら，予想された命題がそれほど重要でなかったら，それは輝きを失うのである．

●参考文献

本文を書くにあたり，主として参考とさせていただいた書名を以下にあげて，感謝したい．

ガリレオに関しては

ガリレオ（今野武雄，日田節次訳）：新科学対話（上，下），岩波文庫．

青木靖三：ガリレオ・ガリレイ，岩波新書．

カントルに関しては

カントル（功力金二郎，村田全訳・解説）：カントル 超限集合論，共立出版．

ブルバキ（田中尚夫，村田全 訳）：数学原論　集合論 3，東京図書．

集合については

辻正次（小松勇作改訂）：集合論，共立出版．

赤攝也：集合論入門，培風館．

松坂和夫：集合・位相入門，岩波書店．

ヴィレンキン（柴岡泰光訳）：集合の話，東京図書．

ガモフ（崎川範行訳）：1，2，3，… 無限大，白揚社．

なお，この方面に興味をお持ちの方には，上記の本を，また，さらに進んで公理的集合論に興味をお持ちの方には

竹内外史：現代集合論入門，日本評論社．

難波完爾：集合論，サイエンス社．

田中尚夫：公理的集合論，培風館．

をおすすめしたい．

なお，遅々としてはかどらなかった著者をはげまし続けてくださった西原昌幸氏には，心から感謝申し上げる．

同値関係と反例

集合 A の任意の 2 つの元 a, b に対して，$a \sim b$ という関係が成立しているか，あるいは成立していないか，がつねに定義されているとする．この関係 $\sim$ が

反射律　$a \sim a$

対称律　$a \sim b$ ならば $b \sim a$

推移律　$a \sim b, b \sim c$ ならば $a \sim c$

をみたしているとき，この関係は**同値関係**であるという．

たとえば，A を実数の全体，$\sim$ を実数の普通の“等しい”という関係とすると，これは同値関係となる．

いま，「関係 $\sim$ が対称律と推移律をみたすとき，$\sim$ は同値関係になる」という命題を考えよう．これは，次のように簡単に証明される．

証明　対称律より，$a \sim b$ とすると $b \sim a$ である．

一方，$a \sim b$ と $b \sim a$ とから推移律によって $a \sim a$ である．a は任意でよいから，反射律が成り立つ．（証明終）

ところで，$A = \{0\}$ とし，“$x \neq y$” なる関係を考えてみよう．$0 \neq 0$ は偽であるから，“ならば”の意味を考えると，この関係は対称律と推移律をみたす．したがって，上で証明された命題によって，反射律も成り立つはずである．ところが，明らかに $0 \neq 0$ は成り立たず，0 は反射律の反例である．

この結果，最初の命題（それをもっと正確に述べれば「任意の集合 A

と A 上の任意の関係 $\sim$ について，関係が対称律と推移律をみたすならば反射律をみたす」となる）が，$\{0\}$ と“$x \neq y$”なる反例をもったことになる．

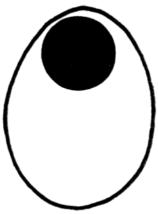
となると，「証明」のどこかに誤りがあったと考えざるをえない．そこで上の反例で「証明」を読みなおしてみると，はじめの 2 つの文は真であるのに，最後の 3 番目の文は偽であるから，最後の文を導く推論に誤りがあったことがわかる．では，この推論はなぜ誤りになったのだろうか．よく見てみると，証明の 2 つの文では $a \sim b$ が仮定として残っていたのに，問題の推論でその仮定を消去してしまったことに気づく．

では，どのようなとき，この仮定が消去できるのだろうか．それは，$a \sim b$ となる b が 1 つでも存在する場合であろう．すなわち，「証明」の出発点は $a \sim b$ を仮定していただけで，$a \sim b$ となる b が存在する保証はどこにもなかったのである．

そこで，さらに次の仮定「A の各元 a について，$a \sim x$ となる A の元 x が存在する」をおく．そして，この仮定で存在の保証される元の 1 つを b とおく．すると $a \sim b$ は真となり，「証明」はつねに正しい推論でつながれ，反射律を得る．

ところで，反射律があれば上の仮定は明らかに成り立つから，上の仮定と反射律は同値なのである．だとすれば，反射律の方がよりスマートな命題ではあるまいか．

（白井）



幾何学と反例

岡部恒治

§1　反例の意義

●反例は新しい数学の道しるべ　**“反例**（counter example)”と聞くと，何か否定的なイメージを感じるかも知れません．さらに，数学上のある**予想**（conjecture）に反例が見つかると「この予想は**否定的に解決された**」などとも言うのですから，そのイメージはますます強まるのです．

しかし，それはあくまでも，語感だけのことです．反例が実際に果たしてきた役割はむしろ，数学を積極的に前進させていくものが多かったと言えるのではないでしょうか．

幾何学に限って言っても，**“非ユークリッド幾何学**の誕生”（この節で用いた用語のほとんどは後で少し詳しく説明する）という歴史的な大事業も反例の一つなのです．また，現代の幾何学ではミルナー（J. Milnor, 1931－　）が**“微分構造”**についての反例で 1962 年にフィールズ賞を受賞しています．これらの反例は，後の数学者の徒労を減らしました．（たとえば，**第5公準**を証明しようなどと考えなくて済むようになりました．）

しかし，それよりも，もっと重要なのは，これらの反例が数学の視点を劇的に変化させたことでしょう．つまり，非ユークリッド幾何学の発見は近代幾何学の幕明けになりました．それから，さらに，公理自体が**“完全”**なのかとか，**“独立”**なのか，などを議論する**“数学基礎論”**を産むことになるのです．また，もうひとつ，非ユークリッド幾何学を生みだした形式理論の力は，“公理が完全で，途中の推論さえあっていれば，意味がある”とする，いわゆる**“形式主義”**に寄与することになるのです．

ヒルベルト（D. Hilbert, 1862－1943）が，「“点”と“直線”と“平面”の代りに“机”と“椅子”と“ビールのジョッキ”を用いても幾何学はできる」と言ったのは有名な話です．

一方，ミルナーの反例は，**可微分多様体**（なめらかな曲面だと思ってください）は**位相多様体**に**微分構造**を入れたもので，みんな同じようなものだろうという，漠然とした考えを見事に破壊してしまいました．こうして，微分多様体の独自の構造を研究する**“微分トポロジー”**が産まれたのです．

●反例を作ってみよう　さて，いま挙げた２つの反例は，数学史の分岐点を誘発するような大きなものでした．しかし，ここで扱うのは，そのような大きなものばかりではありません．小さなものも，取り上げるつもりです．それを扱う一番大きな理由は，僕の能力に分相応なものを優先したせいなのかも知れません．そう書くと身も蓋もありませんから，小さな反例の効用も述べておきましょう．

それは，例を提示することによって，抽象的な数学の理論が，少しは具体的にイメージできることです．これは別に反例に限りません．単に例でもよいのです．

ある空間についての理論をとうとうと述べた学生に「その空間の例を一つ挙げてください」と質問したら，「例は知りません」と答えた，ということを聞いたことがあります．こういうとき，僕はその学生の理解は上滑りではないだろうかと，疑ってかかります．例を豊富に挙げることができるのは，それだけその空間を良く理解していると考えるからです．

さらに，その空間にはならないという反例も挙げられれば，まず，その人の理解は完ぺきと考えられます．なぜなら，反例を作るためには，その空間であるために必要な条件をだして，しかるのちにその条件を外す作業をしなければなりません．だから，その空間の特質を知り抜いていなければ難しいことなのです．

馬鹿馬鹿しい例でもよいですから，例と反例を作りながら数学の本を読んでいけば，ずいぶんと違ってくるでしょう．

●若干の注意　これから述べていく例は，体系的に並べるつもりでもなく，重要さの順でもありません．ただ，僕の個人的に気に入ったものを適当に並べたものです．しかし，説明のしやすさの順にしたつもりです．その点をお含みおきください．なお，読者は数学好きな高校生から，大学生ぐらいまでと設定して話を進めています．だから，説明は，“厳密さ”よりも“直感”を重視しました．

また，本来なら，引用文献は原書とか原論文だけを用いればよいのですが，ここでは，啓蒙書とか啓蒙雑誌を併用しました．そのほうが実際的と思ったからです．しかし，興味がわいてきて，もっと勉強をしたい方は，直接，原書や原論文にあたることをお勧めします．引用文献から，原論文を捜してください．

§2　非ユークリッド幾何学

●現実離れした（?）幾何学　幾何の反例の話を始めるに当たっては，まず**非ユークリッド幾何学**（non-Euclidian geometry）から始めるのが最も妥当なところでしょう．というのは，これほど，ドラマチックで重要な反例は存在しないのではないかとも思われるからです．

ここ数年，講義のなかで，非ユークリッド幾何学と**ユークリッド幾何学**（Euclidian geometry．普通の幾何学のこと．“非ユークリッド幾何学”に対しての言葉です）について，かなりの時間をさいています．また，時々アンケートなど取ったりして，授業内容などの意見を書かせたりしています．そこでの学生の反応は，非ユークリッド幾何学にかなりのとまどいがあることを示しています．

何を隠そう，講義をしている僕自身だって，学生のころ，これを初めて聞いたときにはずいぶん驚いたものでした．そして，“現実性があるのか?”などの疑問をやはり抱いたものです．だから，講義ではその感激をなるべくそのまま伝え，かつ，現実性の問題にも言及してはいるのですが，やはり“しんどい”と言う学生もかなりいるようです．それはやはり，現実が非ユークリッド幾何学には決して見えないからでしょう．ですから，非ユークリッド幾何学を作り上げた人たちは偉大だった，といまさらながらに思います．

前置きが長くなりましたが，本題にはいりましょう．

●原論から始めよう　まず，何が問題なのかをかいつまんで話しておきましょう．『**ユークリッドの原論**』というのは名前ぐらいは聞いたことがある

のではないでしょうか．これは，紀元前300年ごろ，アレクサンドリア（エジプトのカイロの近くの都市．そのころの学問の中心地）で，ユークリッド（Euclid, B.C.330?—B.C.275?）が書きあげたものだと言われています．実際ユークリッドが存在したかどうかすら疑っている人もいるのですから，一人で書きあげたかどうかはまったく霧の中です．でも，ここではそんなことはあまり気にしないことにしましょう．

さて，この本には，いわゆる幾何学のそれまでのすべての結果が体系的に収められています．それで，実に聖書に次ぐベストセラーと言われていました．つまり，中世までは，勉強と言えばまず，原論から始めたそうです．

確かに，原論はそれまでになく，論理の形式がしっかり整っており，長い年月にも耐えることができたようです．実際，原論から実に二千年も後に，ニュートン（Sir I. Newton, 1642—1727）が『プリンキピア』という力学の本を出したときにも，原論のスタイルが踏襲されたと言われています．

●第5公準をどうするか？　原論のスタイルとは，**定義**，**公準**，**公理**，**定理**（theorem）と**演繹的**（inductive）に進んでいくものです．

定義（definition）とは，これから扱う図形についての約束です．これは，「点とは部分のないものである」，「線とは幅のない長さである」などから始まって，「平行線は同一の平面上にあって，両方向に限りなく延長しても，いずれの方向においても互いに交わらない直線である」までの23個があります．

次に**公準**（postulate）が5つあります．公準は今でいう公理に相当するもので，議論の出発点です．つまり，“ほとんど自明な性質”を，まず認めて，そこから，論理だけでいろいろな結論をだしていこうというわけです．

公準の後に**公理**（axiom）があります．これは，「全体は部分より大きい」とか，三段論法などのように，論理の進め方を取り決めたものです．

さて，公準の話にもどりましょう．このうちの4つまでは，当時，だれでも認めざるを得ないようなものでした．しかし，5番目のものは冗長で，分

かりにくいところがあったのです．

念のために，公準をすべて挙げておきましょう．（稿末の文献［1］によるが，細かい字句は少し変えた．詳しい説明は［2］にある．）

公準1　任意の点から任意の点に直線を引くことができる．

公準2　有限直線を連続して一直線に延長できる．

公準3　任意の中心点と半径をもって円を描くことができる．

公準4　すべての直角は等しい．

公準5　一直線 c が二直線 a, b に交わり，同じ側の内角 α, β の和 $\alpha+\beta$ を二直角より小さくするならば，この二直線 a, b は限りなく延長されると，二直角より小さい角のある側で交わる．

（図1参照）

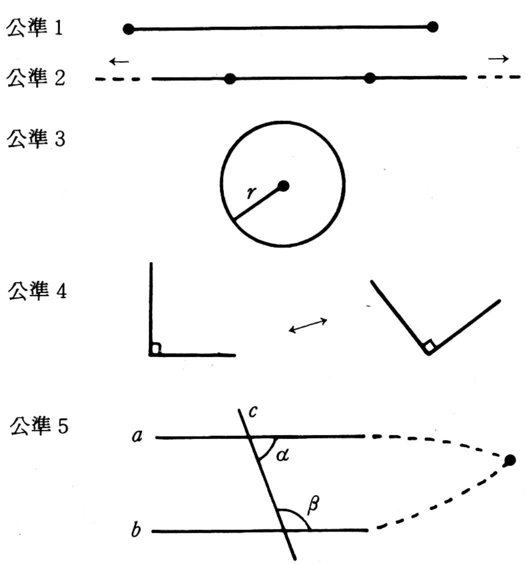


図1

●非ユークリッド幾何学前夜　どうですか，公準5が分かりにくいことがよく分かったでしょう．（本書での書き方は［2］に倣ってあります．ですから，これでもまだ良くなったほうなのです．）

こうなると，“この公準5を何とかしよう”という動きが起こるのは当然です．これだけが不自然な感じがするからです．

この公準5を改良あるいは削除しようという試みは，早くも古代ギリシアのころからあったと言われています．それで，いくつかの公準5と同値な命題が証明されてきました．有名なのは，「一直線とその外部の点が与えられているとき，その点を通って直線に平行な直線が1本だけ引ける」というものです．これでずいぶん見やすくなりました．しかし，他の公準に比べるとやはり，まだ冗長な感は否めません．

削除しようという試みの考え方は次のとおりです．「公準5の否定命題と他の4つの公準から出発して，推論を続けてみよう．もし，他の公準から公準5が帰結できるなら，必ず矛盾が生ずるはずだ．」

この方法で，サッケリー（G. Saccheri, 1667—1733），ランベルト（J. H. Lambert, 1728—1777），ルジャンドル（A. M. Legendre, 1752—1833）などが，かなりの線まで迫っていたらしいのです．しかし，いずれも“矛盾”を見つけたと思って，失敗しています．実際には，公準5と同等の条件を暗に使ったりしていました．

これらの3人などは，ほんの少し観点を変えるだけでもう非ユークリッド幾何に入るところまでいっていたようです．

●悲劇の数学者たち　非ユークリッド幾何がきちんと文献に現われたのは，ガウス（C. F. Gauss, 1777—1855）の1822年の書簡が初めてです．しかし，ガウスは相手に公開を禁じています．

また，1823年に，ボヤイ（J. Bolyai, 1802—1860）が独立に，絶対幾何というものを発見しています．これは，ガウスのとほとんど同じものだと言われています．しかし，父親がその発見を認めることができなくて，ガウスにそれを送って判定してもらったことから，行き違いが起こりました．ボヤイは自分の発見をガウスに取られたと感違いして，悲嘆にくれながらこの世を去ったと言われています．彼の業績は，彼の死後に，認められるようになり

ました．

一方，ロバチェフスキー（N. I. Lobačevskii, 1793－1856）は1826年に，やはり同じ形の非ユークリッド幾何を発表しています．しかし，これも，ほとんど（ガウス以外の）だれにも認められず，彼も死後にその名が高まったのです．

さて，もう一人リーマン（G. F. B. Riemann, 1826－1866）がいます．彼が1854年に行なった就職講演「幾何学の基礎にある仮定について」には，別の形の非ユークリッド幾何が登場してきます．彼の非ユークリッド幾何も死後に有名になります．彼の場合は単に，印刷されたのが死後だったというだけです．

ガウス，ボヤイ，ロバチェフスキーの仕事は，ガウスが死んで，著作集を編集する段階で，世界に認められるようになったのです．

そして，この非ユーリッド幾何学が市民権を得るのは，クライン（F. Klein, 1849－1925）がいわゆるクライン・モデルを作ってからなのです．これは，「幾何学はユークリッド幾何学しかない」という命題に対する，具体的な反例と言えましょう．

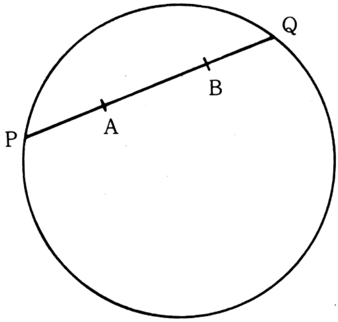
●クラインのモデル　クラインがこれを作るまでは，とにかく「非ユークリッド幾何学はガウスが言っているから正しいかも知れないが，何のことか皆目わからない」というのが，大方の捉え方でした．ですから，クライン・モデルの果たした役割はその点で大きかったわけです．

クラインのモデルを説明しておきましょう．基本的には，円盤の中を一つの宇宙と考えればよいのです．そして，この円の**弦**（chord）を直線とします．それで，この有限の宇宙の中の人間が有限と感じないように，距離を決めておくのです．（距離については§3で詳しく論ずるでしょう．）

それにはどうするのかというと，境界に近くなるとすべてのものが小さくなると思えばよいのです．自分も小さくなるけれど，まわりの景色も，衣服も小さくなっているので気がつきません．境界に近くなればなるほど小さく

なるので，本人は一定の速さで進んでいるつもりでも，外から見るとほとんど進んでいないのです．ですから，境界へ到達することは不可能なのです．

その距離は，数式で表わすと次のようになります．図２の AB 間の非ユークリッド的距離 $\widetilde{AB}$ を，次のように定義します．ここで，$\overline{QA}$, $\overline{PB}$, $\overline{QB}$, $\overline{PA}$ などはみな，外から見た距離です．つまり，ユークリッドの意味での長さです．



非ユークリッド的距離を $\widetilde{AB}$ とする．

$$\widetilde{AB} = k\log_e\left(\frac{\overline{QA}\times\overline{PB}}{\overline{QB}\times\overline{PA}}\right)$$

底として自然対数の底 e（＝2.71828…）を使っているが，これは本質的ではない．

図 2

ここで，k は定数です．一つ固定しておきます．対数の底もなんでもよいのです．底の大小は k を取りかえることによって，影響がないからです．こうしておくと，もし A が P に近づけば $\overline{AP}$ が 0 に近づくので，クライン・モデルでの距離 $\widetilde{AB}$ は大変大きくなってしまいます．つまり，外から見て同じ長さでも，境界に近いものはかなり大きな距離になる，ということが分かるでしょう．

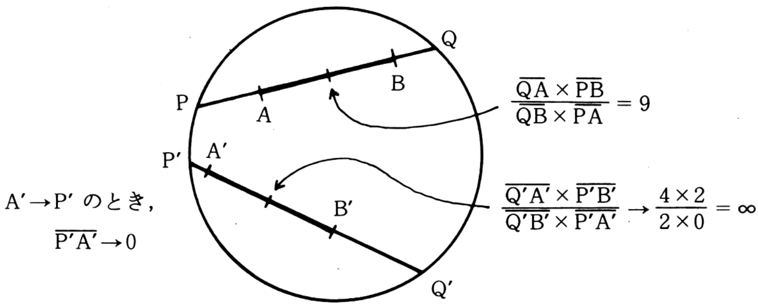
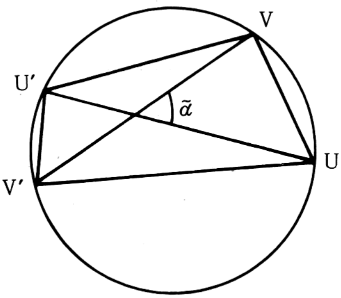


図 3　外からは，同じ距離に見えるが……（$\overline{PQ}=4$, $\overline{AB}=2$ のときの計算）．

●いくらでも平行線がある　　さて，この空間のなかでの角度は，どうなるでしょうか．それは，次の図で示されます．図4のような角 $\tilde{\alpha}$ に対して，

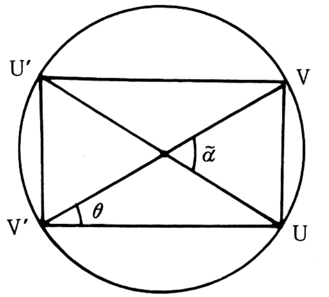
$$\tan^2\left(\frac{\tilde{\alpha}}{2}\right)=\frac{\overline{\mathrm{UV}}\times\overline{\mathrm{U'V'}}}{\overline{\mathrm{UV'}}\times\overline{\mathrm{U'V}}}$$

とおくのです．ちょうど交点が中心点ならば，普通のユークリッド幾何のときの角度と一致しています(図5参照)．



$$\tan^2\left(\frac{\tilde{\alpha}}{2}\right)=\frac{\overline{\mathrm{UV}}\times\overline{\mathrm{U'V'}}}{\overline{\mathrm{UV'}}\times\overline{\mathrm{U'V}}}$$

図 4



中心点では $\tan\tilde{\alpha}$ と $\tan\alpha$ が一致する．

(α は外から見た角．$\theta=\dfrac{\alpha}{2}$．)

$$\because)\quad \tan^2\left(\frac{\tilde{\alpha}}{2}\right)=\frac{\overline{\mathrm{UV}}\times\overline{\mathrm{U'V'}}}{\overline{\mathrm{UV'}}\times\overline{\mathrm{U'V}}}$$

$$=\left(\frac{\overline{\mathrm{UV}}}{\overline{\mathrm{UV'}}}\right)^2=\tan^2\theta\ \left(=\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

図 5

この距離と角度で幾何学を作っていくと，矛盾なく幾何学ができ上ります．この幾何学を**双曲線幾何学**（hyperbolic geometry）と呼びます．

さて，このモデルでの性質をいくつか挙げておきましょう．そうすると，ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何の違いが良く分かるはずです．

まず，最も問題なのは，平行な直線の数です．これが，出発点だったのですから．

この幾何では，ある一点を通って，ある直線に平行な直線は，いくらでも引けることが分かります．平行の定義を思いだしてください．交わらない直

線が平行だったのです．図6の直線 AB に平行で，点 P を通るものを2つ示しておきました．これ以外にもたくさん作れるということが分かるでしょう．

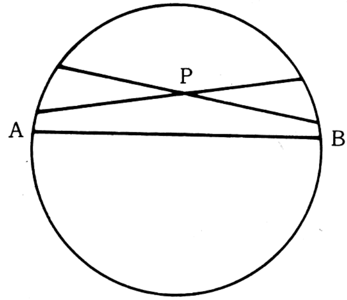


図6

平行になるためのぎりぎりの角度を，**臨界角** (critical angle) といいます．分かりやすいように，直線 AB は中心点O を通るとし，点 P からの垂線が中心点に下りているとします．また，OP の距離を $\tilde{x}$ としておきます．この場合の臨界角の値を $\Pi(\tilde{x})$ とおくと，次の式が成り立ちます．距離も角度も非ユークリッド幾何のほうを使っています(図7参照．証明は飛ばしてもよい)．

$$\tan^2\frac{\Pi(\tilde{x})}{2}=e^{-\frac{\tilde{x}}{k}}$$

証明

$\angle \mathrm{DEC} = \angle R$

$\angle \mathrm{DEB} = \angle \mathrm{DCB} = 45°$

$\angle \mathrm{BEC} = \angle \mathrm{BDC} = 45°$

∴ EB は ∠DEC の2等分線

∴ $\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{DP}}:\overline{\mathrm{PC}}$

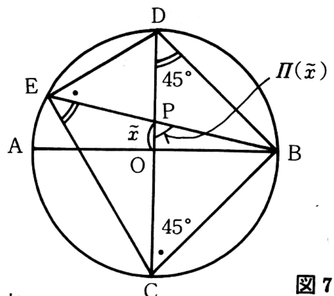


図7

さて，

$$\tilde{x} = k\log_e\frac{\overline{\mathrm{PC}}\times\overline{\mathrm{OD}}}{\overline{\mathrm{OC}}\times\overline{\mathrm{PD}}}$$

$$= k\log_e\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{PD}}} \quad (\because\ \overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OD}})$$

$$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{PD}}} = e^{\frac{\tilde{x}}{k}}$$

$$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{PD}}}{\overline{\mathrm{PC}}} = e^{-\frac{\tilde{x}}{k}}$$

一方，

$$\tan^2\frac{\Pi(\tilde{x})}{2} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{DE}}}{\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{CE}}}$$

$$= \frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\overline{\mathrm{CE}}} \quad (\because\ \overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BD}})$$

$$= \frac{\overline{\mathrm{DP}}}{\overline{\mathrm{PC}}}$$

$$= e^{-\frac{\tilde{x}}{k}}$$

●三角形の内角の和＜180°　さて，次に重要なのは，角度がどうなるかです．つまり，外から見える角度と中で測った角度の違いです．さきほどは，中心点で一致していることを確かめました．他のところではどうでしょうか．

結論から先に言いますと，角度は一般的に小さくなります．それを証明してみましょう．（VV′ が直径のときだけやっておきます（次ページ）．ただし，証明が面倒な方は，飛ばして先に進んでもかまいません．）

こうして，この幾何学では，三角形の内角の和が 180° より小さくなってしまうことが分かります．

●平行線が引けない　いまの双曲線幾何学と対称的なものが，リーマンの提出した**楕円幾何学**（elliptic geomtry）と呼ばれるものです．

対称的なのはどこかというと，今度は平行線が全然ひけないのです．もう一度，ユークリッドの公準5と，それによって出てくる性質を振り返ってみてください．それによると，与えられた直線に平行な，与えられた点を通る，**平行線が必ず一本ひけた**のです．

ということは，楕円幾何学もやはり，ユークリッド幾何学とは違う例なのです．

楕円幾何学の例は，球面の上の幾何学として実現されます．つまり，球面上で**大円**（great circle）を直線とみなして，幾何学を作るのです．ただ，そのままだと，2つの直線は2点で交わってしまいます．そこを少し工夫するわけです．

2つの大円が交わるのは，必ず球の中心に関しての対称点です．ですから，**中心に関しての対称点**（antipodal point）を同一視してしまえばよいのです．同一視とは2つの点を1つの点と思うことです．別の言葉でいえば，それぞれの対称点をくっつけていくと考えればよいかも知れません．でも3次元空間の中では実現できません．

目には見えないのです．というと，「また，分からないことを言いだした」と思うかも知れません．しかし，幾何学としては極めて見やすいものです．

証明 外から見て

$PQ \mathbin{/\!/} U'U$

$\angle U'UP = \angle UPQ = \theta$

$\angle VOQ = \angle POV' = \alpha$

とおく．そうすると $\angle VV'Q = \dfrac{\alpha}{2}$ などが成り立つ(外から見て)．

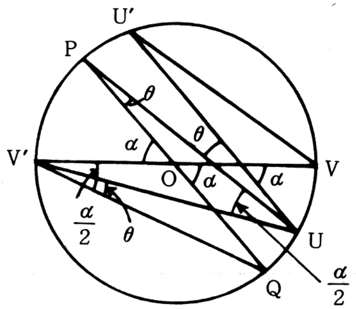


図 8

このとき，

$$0 < \frac{\alpha}{2} < 45°, \quad 0 < \theta < 45°,$$

$$\angle VV'U = \frac{\alpha}{2} - \theta, \quad \angle U'VV' = \frac{\alpha}{2} + \theta$$

などが成り立つ．ゆえに

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) = \frac{\overline{UV}}{\overline{VV'}}, \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right) = \frac{\overline{U'V'}}{\overline{VV'}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) = \frac{\overline{UV'}}{\overline{VV'}}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right) = \frac{\overline{U'V}}{\overline{VV'}}$$

よって，$\tan^2 \dfrac{\tilde{\alpha}}{2} = \dfrac{\overline{UV} \times \overline{U'V'}}{\overline{UV'} \times \overline{U'V}}$ に上の 4 式を代入して，

$$\tan^2 \frac{\tilde{\alpha}}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}$$

$$= \tan\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) \times \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\alpha}{2} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\theta} \times \frac{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\alpha}{2}\tan\theta}$$

$$= \frac{\tan^2\frac{\alpha}{2} - \tan^2\theta}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\theta} < \tan^2\frac{\alpha}{2}$$

最後の不等式は，差をとって通分すれば，すぐにでてくる．ここに，$0 < \tan\dfrac{\alpha}{2} < 1$，$0 < \tan\theta < 1$ を用いる．(読者自らやってみよ．)

空間の全体の形が見ずらくとも，実際に図形を処理するのはその空間の一部分だけなのです．

だから，球面の上半分（これを**北半球**（north hemisphere）という）だけで幾何学を作っていけばよいのです．ここで，さきほども言いましたが，大円が直線なのです．また，大円と大円が交わっている所の角度は，２つの曲線の接線が作る角度と考えればよいでしょう(図９参照)．

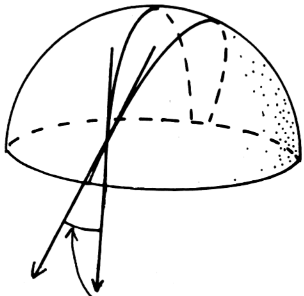


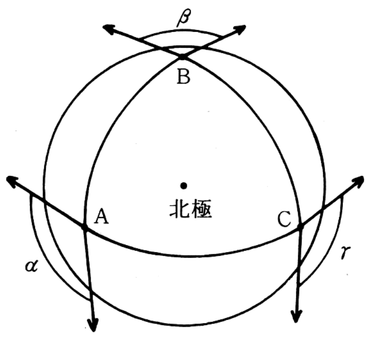
図 9

●内角の和＞180°　この楕円幾何学で成り立つ性質を，少し挙げておきましょう．

まず，２つの直線は必ず交わるということです．ですから，当然の帰結として，平行線は存在しません．

次に重要なのは，三角形の内角の和に関するものです．球面上に大円で三角形を描いてみてください．図10のような形になるでしょう．

明らかに，三角形の内角の和は180°よりも大きくなっています．内角の和が540°に近くなるような三角形すら作ることができます(図10参照)．



△ABCの内角はそれぞれ180°に近くなっており，３つ加えると540°に近くなる：

$$\alpha+\beta+\gamma \fallingdotseq 540^\circ$$

図10　北半球を北極のほうから見たところ．

●さらに読み進む人に　双曲線幾何学と楕円幾何学に対して，普通のユークリッド幾何学のことを**放物線幾何学**（parabolic geometry）と呼ぶこともあります．

この3種類の幾何学は，大きく見るとそれぞれ異なっていますが，局所的に見るとほとんど変わりません．現在我々が住んでいる宇宙も，まわりだけを見ていると，ユークリッド幾何学が完全に適合しているように見えます．しかし，もっと大きく見ると，非ユークリッド的であってもよいのではないか，と考えられ始めています．アインシュタイン（A. Einstein, 1879−1955）の**相対性理論**（theory of relativity）はそれを示唆しています．そうなると，全然実用的でないように思われ，また数学者の空想の産物のように見えた非ユークリッド幾何学は，俄然，実用的になるのです．

§3　開集合と閉集合

●遠くて近きは…　2変数関数の連続性とか微分などを調べるには，1変数のときのように楽にいかないことがあります．

そこで，それを調べるための道具というか，言葉というか，そのようなものが必要になってきます．そのなかでも，特に，点と点の近さを表現することが重要です．そうしないと，極限などが定義できませんから．

これが，**一般位相**あるいは**ジェネラル・トポロジー**（general topology）というものです．昔は単に“トポロジー”と呼んでいたのですが，図形を扱うほうのいわゆる位相幾何学（これも，やはりtopology）にお株を取られてしまったのです．いまでは，図形を扱うほうを単に“**トポロジー**”と呼んでいます．

「“近さ”なんか，距離を使えばいいじゃないか」と言う人がいるかも知れません．そう，もちろん距離もトポロジーのなかでは重要なものです．しかし，距離が実際的でないこともあります．たとえば，次の質問はどうでしょうか．

東京から千歳（ちとせ）へ行くのと，水戸から襟裳（えりも）岬へ行くのとは，どちらが大変か？

この質問に答える前に，水戸と襟裳岬の直線距離は，東京と千歳の距離よりずいぶん短いということを頭に入れておいてください（図11参照）．

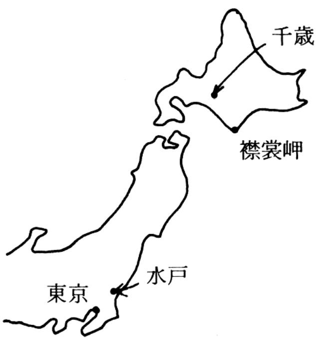


図11

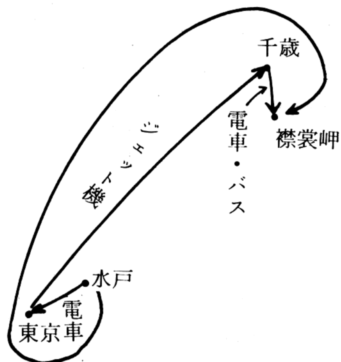


図12

●距離が違うこともある　答えは人によって違うでしょう．でも，多くの人は「東京と千歳の間のほうが楽だ」と答えるに違いありません．つまり，実際に旅行してみれば分かります．水戸から襟裳岬へ行くには，「まず，東京に出て，羽田空港から千歳空港までジェット機で飛び，千歳から列車とバスに乗り継いで，はるばる襟裳岬に至る」というのが，普通のコースでしょう．そうなると，千歳と東京の間は，途中で通過する一部分にすぎなくなります．（ユークリッドの公理でも「全体は部分より大きい」としています．）

でも，たとえば，ヘリコプターで行動している人にとっては，襟裳岬に行くほうが，時間も燃費も少なくなるでしょう．

これを大げさに描くと，図12のようになります．

これは，「直線距離が短ければ近い」というほとんど自明の事実に対する反例になっています．

さて，話題がどんどん外れていきましたが，いまは，この反例が主要な論点ではありません．言いたいのは，ある集合に距離を考えるにしても，いろんなものがあるということです．

●父親の心情を表わす距離　一つ距離を決めればよいかも知れませんが，それぞれの立場によって実用的な距離が違います．一回一回「今度扱う集合の距離は … です」などと書くのも，それぞれの距離の関係を調べるのも面倒です．そこで，"距離空間"なるものを考えて，そういうものを一括して議論しておこうということになったのです．さらに，普通の距離では"遠さ近さ"が表現できないときもあります．図13がその反例です．

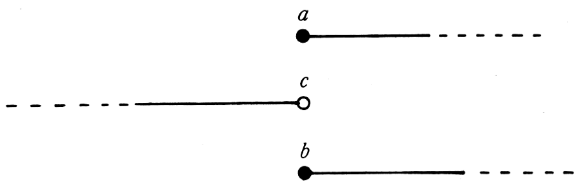


図13　a と c，b と c の距離は0だが，a と b の距離が大きいとする．

上の図では，点 a, b, c（c は実際には存在しませんが，その近くの点と考えてください）で，奇妙なことが起こっているとします．a と b の２つの点は絶対に近くはないが，a と c はくっついていると考えられるくらい近い．また，b と c についても同じことが成り立っています．

こういうときは，a から c へ行って，さらに c から b へ行けますから，a と b も近いのが普通です．しかし，数学を応用する際には，(たまに）普通でないことも，考える必要があるのです．

こういうことは人間関係にもよくあることです．たとえば，娘が親から見て，たちの悪い男に引っ掛かったら，その娘と親は非常に近いし，その娘とその男も近い（0親等です．一身同体などとも言います）のに，その男と娘の親とは，精神的には宇宙の果てよりも遠い距離にあります．

さて，このような距離感を表現するために，位相というものがあるのです．

●近所のことだけ考える　高校で扱う関数で“**連続**とか**微分**”を定義するときには，**極限**（limit）を用います．極限は言わば「ある点にどんどん近づけたときにどうなるか」を調べるものでした．ということは，ある点で連続とか，ある点での微分を定義するためには，対象になっている点の近くの状態だけ見ればよいということが分かります．だから，いろいろな距離があっても，あっちの距離で近所なものはこっちの距離でも近所であれば，「その2種類の距離は同じとみなそう」という広い心を持ってしまうのです．

このことをさらに拡張して，「もし，まともな距離が考えられなければ，距離と同じ意味をもつものを導入しちゃえ」というわけで出てきたのが位相なのです．

ですから，位相では近いものだけを決めておけばよいのです．ある点に対して，それに近い点の集合を“**近傍**（neighbourhood）といいます．（どうせなら，“近所”といえばもっと身近に感じられたのに，ちょっと残念です．）

もちろん，近所にも三軒両隣から町内会とか団地自治会，あるいは○○市，果ては日本に至るまで，いろんな段階があります．人によって“近所”の受け取り方が違うように，近傍にも，小さいものから大きいものまでいろいろなものがあります．この近傍を決めることを「位相を決定する」というのです．

たとえば，距離が決まっていれば，x からの距離が a 未満の点すべてからなる集合 $U_a(x)$ を“**x の a 近傍**”と呼んだりします．この場合 a は実数であれば，なんでもよいのだから，一般には x の近傍は無限にあることになります．

●開いた集合　ただ注意してほしいのは，近傍の定義をそのままにしておくと，いろいろ都合の悪いことも起こってきます．というのは，各点で a の近傍として a それ自身を認めてしまうと，普通の距離と全く違ったものしか

作れません．この位相を**離散位相**（discrete topology）といいます．つまり，この空間では，各点ばらばらの距離感なのです．（後で，**連結性**を定義するときに，もう一度，説明します．）

そこで，まっとうな距離が俎上に載せられるように，近傍の定義に少し条件をつけ加えるのです．その詳しい説明はここでは省きますが，要するに，“近い”という単位を，距離によらない方法で作ることができるのです．

近傍によらない，別の近さの表わし方もあります．それが開集合によるものです．近傍の方法と本質的には同じですから，そちらを紹介します．

集合 X について，その部分集合の集合（これを**族**（family）といいます）Θ で，次の3条件を満たすものを**開集合族**といいます．

$$(*)\begin{cases}(1)\quad X \text{ も } \varnothing \text{（空集合）も } \Theta \text{ に入っている} \\ (2)\quad \Theta \ni U_i \text{ ならば } \Theta \ni \bigcup_i U_i \\ (3)\quad \Theta \ni U_1, U_2 \text{ ならば，} \Theta \ni U_1 \cap U_2\end{cases}$$

この Θ の元を**開集合**といいます．

開集合を近傍と考えてもよいのです．人によっては，そういう定義の取り方をします．そのほうが定義しやすいし，全く同じことになるからです．

開集合の具体的なイメージは，直線のなかで，線分の両端を含まないものを考えるのが，最も分かりやすいでしょう．つまり，$a>x>b$ なる x を，(b, a) と書いて，**開区間**（open interval）と呼びます．これらとこれらの和集合を，直線のなかで開集合というのです．

これが，平面の上ですと，さきほど定義した，x の a 近傍 $U_a(x)$ のようなものの和集合（無限個でもよいし，a は動いてもよい）として表わせるものを開集合とすれば，普通の距離と一致するのです．

つまり，開集合はその境界を含まないような集合と考えると，最も普通に考えられる距離のイメージと一致するはずです．

●無限個の交わり　さて，上の（$*$）の（2）と（3）の条件は似ていますが，少し違っています．大体，こういう条件というのは，和集合で成り立つ条件

と交わりで成り立つ条件とが，ほとんど同じ形になるものです．なぜ対称にならないのでしょうか．

それの反例として，次の例があります．

全集合を実数とする．すなわち，直線です．開集合を，開区間とその和集合としておきます．このとき，

$$I_k = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \quad とすると，\quad \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{0\}$$

となり，開集合の無限個の交わりが1点になってしまうことがあります．こ

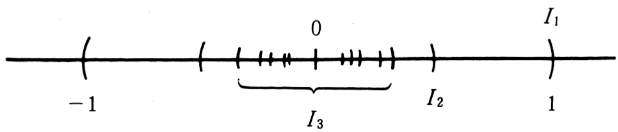


図14

れは，特別な場合だけではなく，普通の距離空間でもそうなるのです．そうすると，いつでも離散位相と同じになってしまって，都合が悪いのです．こうして，和集合は無限個でもよいが，交わりは有限個に限る，としなければならなくなるのです．

●全部くっついた集合　　もちろん，この位相を考えるきっかけとなったような，普通とは違うものがあってもよいわけです．たとえば，「開集合はすべての部分集合である」とすれば，離散位相がでてきます．

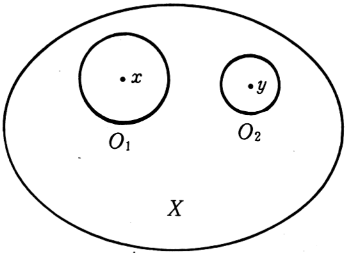
逆に，「開集合は全集合 X と $\emptyset$ に限る」としても一つの位相が考えられます．これを**密着位相**といいます．なぜ，密着位相というかというと，すべての点はみな同じ近傍に入っている（つまり，どの点もみな近いとみなしている）からなのです．

注意してほしいのは，位相は集合に最初から決まっているものではない，ということです．その部分集合で条件を満たすものをもってきて，初めて，位相を入れることができるのです．さきほどの直線でも，密着位相を入れることもできるし，離散位相を入れてもよいし，また，いわゆる普通の位相を

入れてもよいわけです．その場その場で，最も適当と思われる位相を入れておくわけです．大体は，普通の開区間から作られる位相を使います．ここでも，なんの断りもないときには，その位相が入っていると思ってください．

● 2つの点を分離する　位相空間のなかで最も扱いやすいのは，やはり，距離空間でしょう．つまり，距離が入っているような，ごく普通の空間です．それで，その距離空間をあいだにはさんで，すべてくっついているとみなしてしまう密着位相から，全部ばらばらという離散位相まで，それこそ無限の段階がありました．その段階を決めるのが，開集合の族でした．

その段階のなかに，これから話題になる**ハウスドルフ空間**（Hausdorff space）があります．ハウスドルフ空間というのは，X の中の異なるどんな2点 x と y についても，x を含む開集合 O_1 と y を含む開集合 O_2 があって，$O_1 \cap O_2 = \varnothing$ とできるものです．



2点 $x \neq y$ に対して，$O_1 \ni x$, $O_2 \ni y$ なる2つの開集合がとれて，

$$O_1 \cap O_2 = \varnothing$$

とできる．

図15　ハウスドルフ空間

つまり，ハウスドルフ空間なら2つの点を，開集合で分離できるというわけです．密着位相なら開集合が全集合と $\varnothing$ しかないので，こうはいきません．また，離散位相なら，O_1 として x をとり，O_2 として y をとればよいのですから，当たり前です．

ハウスドルフ空間の他に，分離に関するものの条件として，正規空間とか正則空間など，たくさんあります．しかし，ここでは紙面の都合で，他のものは取り上げません．気になる方は［4］でも読んでください．

さて，なぜハウスドルフ空間だけを目の仇のように扱うかというと，我々幾何学に関係しているものは必ず**多様体**（manifold）を使います．その多様体の条件にハウスドルフ空間が必ずついてくるからです．

●曲面の拡張　もし多様体が難しく感じるようなら，曲面の拡張概念だと思えばよいのです．つまり，2次元のときはまるっきり曲面と同じです．1次元のときは曲線です．これらのものの拡張ですから，その特徴をつかみ出さなければなりません．曲面は図16のようなものです．共通の性質はなんでしょうか？

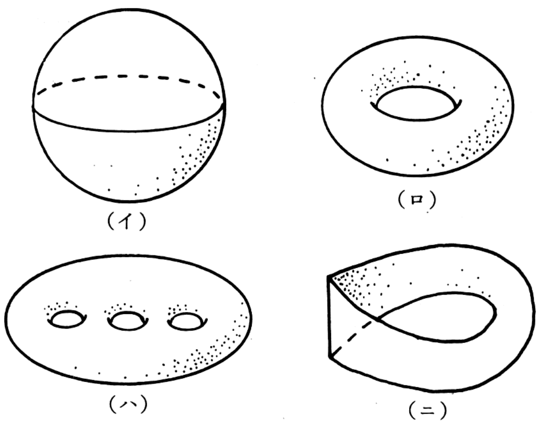


図16　曲面の図

それは，そのまわりの小さな部分（これを**局所的**（locally）という）を考えれば，少しは曲がっているかも知れないが，平面と同じ感じになっているということです．この言い方は少し漠然としているかも知れないので，きちんと言い直します．「各点について，ある開集合をとれば，その開集合が平面の開集合と同じになる」というわけです．（（ニ）のように境界のあるものについては，境界の所が少し違います．）

しかし，ここに出てくる“同じ”という言い回しも，少し説明を加えたほうがよいかも知れません．この場合は，数学的には**同相**（homeomorphic）

ということです．すなわち，2つの集合の間に1対1の連続写像 f があって，その逆写像 f^{-1} もまた連続になっているということです．同じ“同じ”という言葉でも，出てくる場所によっては全然違う意味をもっているので注意してください．

同相というのは，直感的には，伸ばしたり縮めたりして重ねられることをいうと考えてください．（同相写像については再び§4で扱います．）

●多様体にならない空間　さて，こうして，多様体の定義ができ上がるわけです．すなわち，「ある空間が n 次元多様体であるとは，各点のまわりが n 次元の空間の開集合と同相になっているとき」というわけです．

しかし，直感的にはこれで十分なはずなのですが，まずい場合もあるのです．その反例は，実はすでに図13で与えられているのです．つまり，あの図はどこの点でも開集合を適当にとれば開区間と同相になります．問題になるのは a, b の2点だけです（c は点としては存在していないので問題にならない）．ところが，その2点のいずれもが，ちゃんと開区間と同相な開集合をもっているのです．

しかし，あの図が曲面になるとしたら，直感的な意味とずれているので，少し具合が悪そうです．そこで，多様体の定義のなかにハウスドルフを入れることになったのです．あの空間はハウスドルフではありません．なぜなら，a と b を分離することができないからです．つまり，a を含む開集合と b を

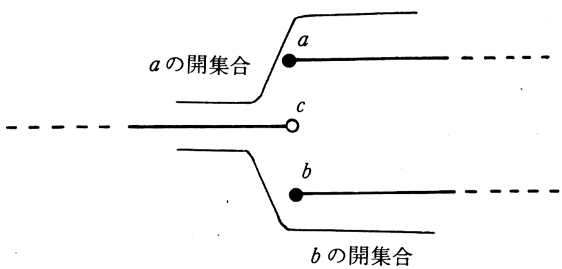


図17

含む開集合をそれぞれとってくると，どんなに小さな開集合をとっても必ず交わってしまうのです(図17参照).

● 2つの連結　さて,「位相は集合の中に近さを決めたものだ」と言いました．近さを決めれば，当然，つながっているかどうかが決まります．x と y が X の中で曲線で結ばれれば，x と y は X の中で**弧状連結**（arcwise connected）といいます．もし，X の中からどの2点を取りだしてきても，つねに弧状連結ならば，“X は弧状連結”といいます．これはかなり直感的に分かりやすい定義ですが，連結に関しては別の方法もあります．

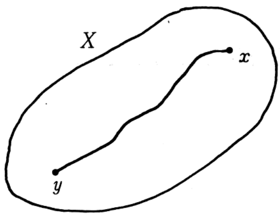


図18　x と y は弧状連結.

もう一つの定義は,「X が2つの集合 A と B に分かれたとき，A も B も開集合ならば，X は連結でない.」つまり，連結でないのは，

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \varnothing \quad (A \text{ も } B \text{ も開集合})$$

となっているときです．

逆に，そういう分け方が存在しないときに，X は“**連結**（connected)”だというのです．この連結性も正当な感じがします．それは，図19のように，実数の部分集合の $(0, 1)$ と $(2, 3)$ からなる空間を考えてみます．そして，

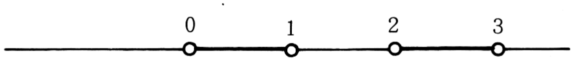


図19

普通の距離が入っていると思うのです．すると，この空間は $(0, 1) \cup (2, 3)$ と書かれ，2つの部分集合 $(0, 1)$ と $(2, 3)$ は，ともに開集合となっています．確かに，連結でない感じがよくでています．

どんな集合でも，密着位相を入れれば連結になり，離散位相を入れれば，各点が全部連結でなくなります．この弧状連結と連結は，普通の空間ではだいたい一致します．つねに一致すれば，2つも名前は必要ないのですが，一

致しないこともあるのです．それが次の反例です．

●櫛(くし)の空間　平面の中に，点 A(1, 0) と B(1, 1) とを結ぶ線分を考えます．この線分のコピーを，次々に空間の上に置いていきます．まず (1/2, 0) の所へ，次に (1/3, 0) の所へ，さらに，(1/4, 0), (1/5, 0), …… というふうにしていきます．そうして，C(0, 1) と O(0, 0) の所と，OA の所に線分を追加しておきます．こうしてできる図形に，平面の距離と同じ距離を入れておきます．これは，線分 CO の所に線分が密集していますが，弧状連結かつ連結となっています．ここで，点 O を抜いてしまうとどうなるでしょうか(図 20 参照)．この空間を**櫛空間** (comb space) といいます．櫛に似ているからでしょう．

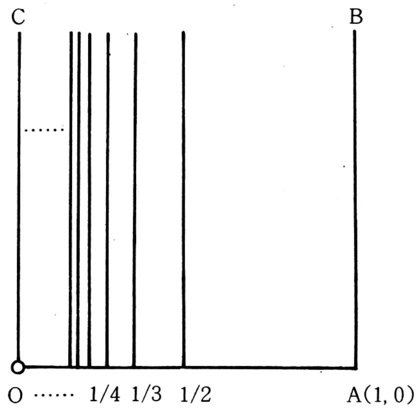


図 20　櫛空間 − (0, 0)

C と A は明らかに曲線では結べません．ですから，弧状連結ではないのです．しかし，驚くべきことに連結になります．

それは，CO に密集している線分のせいなのです．この密集している線分があるために，2 つにうまく分割できないのです．分割しても片方は開集合にならなくなってしまいます．

§4　位相幾何学

●駅の切符売り場で　§2でもお話ししましたが，2つの空間があったとき，それらが“同値”というのは，いろんな立場があります．たとえば，角度とか長さが問題だったら，合同なものしか同じだとみなさないでしょう．あるいは，どこにあるのかその場所も問題ならば，動かすことさえ禁じなければなりません．

しかし，設計図を画くときには，合同だけでは困ります．図面の大きさがべらぼうなものになってしまうからです．ですから，縮尺1/500などというように，設計図のわきに書いてあります．これは，相似なものも同値としているのです．

さらに，国電の料金表を見てください．ここでは相似すら成り立っていません．山の手線があんなにきれいにまるくなっているはずはないですし，中央線が真ん中を直線状にぶった切っているわけでもありません．しかし，あの地図を見て文句を言う人はめったにいないはずです．というのは，あれはあれで，ずいぶん分かりやすくなっているからです．もし，地図の線路のとおりに描いて貼りだしたら，きっと苦情が殺到するのではないかと思います．つまり，電車で行くときにどう行ったらよいか，いくらで行けるのか，などの情報を表示するのに最も適当な図があれなのです．

●伸ばしたり縮めたり　このときには，長さは少しは関係あるかも知れませんが，角度などは全然問題になりません．相似でもない図形です．つながり具合が最も重要な要素です．この考え方で同値を空間に入れていくものを**位相幾何学**あるいは**トポロジー**（topology）といいます．つまり，トポロジーというものは，つながり具合を重要だと考えているのです．同じようなつながり具合のものは同値，すなわち同じ空間とみなすのは，その立場からなのです．同値関係にある2つの空間は，**同相写像**（homeomorphism）でうつりあいます．同相写像とは，連続写像でその逆写像も連続写像となるものでした．それで，その2つの空間は“同相である”と言いました（§3参照）．

同相の直感的な表現は次のとおりです.「ゴム膜に図形を描いておいて,ゴム膜を伸び縮みさせてできるものは,みな同値である.」

これはかなりゆるい同値関係です. たとえば,円も,三角形も,多角形も同じものとみなされてしまいます.

A と B が同相のときには

$$A \approx B$$

と書きます. このとき,A は伸ばしたり縮めたりして,B に重ねられると思えばよいのです. ただ,くっつけたり,つぶしたり,切ったりしてはいけません.

円を三角形と同じだと思うのですから,かなり,いいかげんな同値関係だと思われます. しかし,料金の図を見て,利用者は鉄道の路線をちゃんと思い浮かべているのですから,鉄道の地図と料金表示のための図は,その同値の関係を用いて立派に役立っていると言えましょう.

●トポロジーの位相的分類　こんないいかげんに見える同値関係ですから,なんでも同相かと言うと,そうではなく,ちゃんと区別がつくものがあります(これも一種の反例でしょう).

たとえば,「トポロジー」という5つの文字はすべてお互いに同相ではありません. 次のページの図21を見てください. 同相でない理由も書いてあります. 同相による分類も,意外に細かいことが分かるでしょう.

このことを利用して,文字をコンピュータに読み取らせるときにも,トポロジーの考え方を使うことができます.

●つぶせるものならつぶせ　さて,同相よりもっとひどい分類もあります. さきほどの分類のなかで,「ト」と「ー」の違いは,三叉路があるかどうか,によるものだと言いました. この2つも一緒にしてしまう分類法もあるのです.

それは,数学の用語では**コラプス**(collapse. つぶすとか,折りたたむと

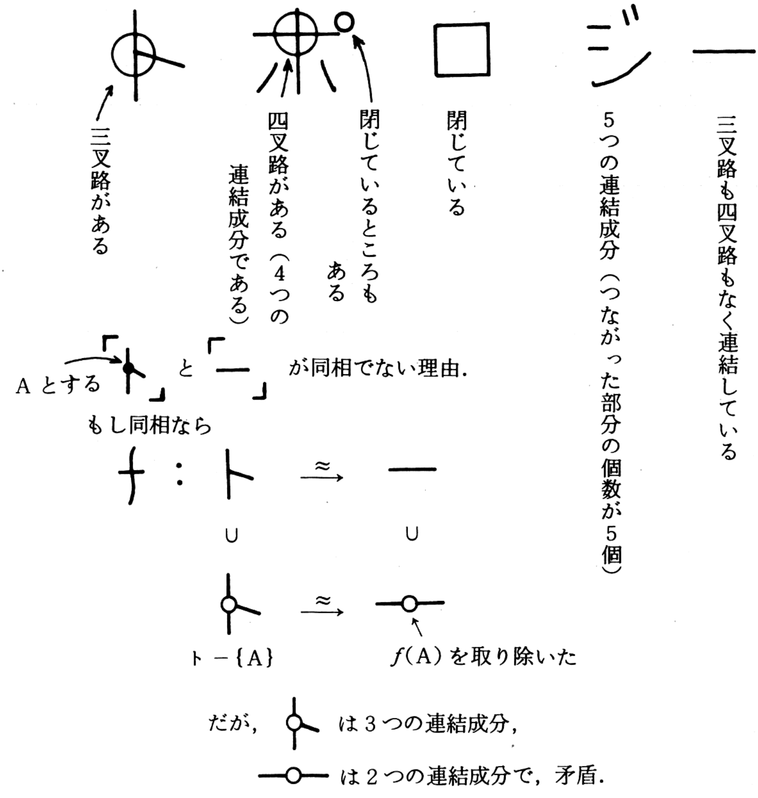


図21 「トポロジー」の同相による分類

いう意味)，あるいは**強変位レトラクト**（strong deformation retract）などといわれているものを使います．

つまり，本当につぶしてしまうのです(図22を参考にしてください)．ただし，この場合は連結な集合だけを扱い，円周のようにつぶすと中に空気が入ってしまうように見えるものはダメとします．

数学的に表現すると，空間Aが部分集合Bにつぶれるとは，Aの中で**連続に変形して（切らずに）**Bにもっていける，ということです．このとき，

$$A \searrow B \qquad \text{あるいは} \qquad B \swarrow A$$

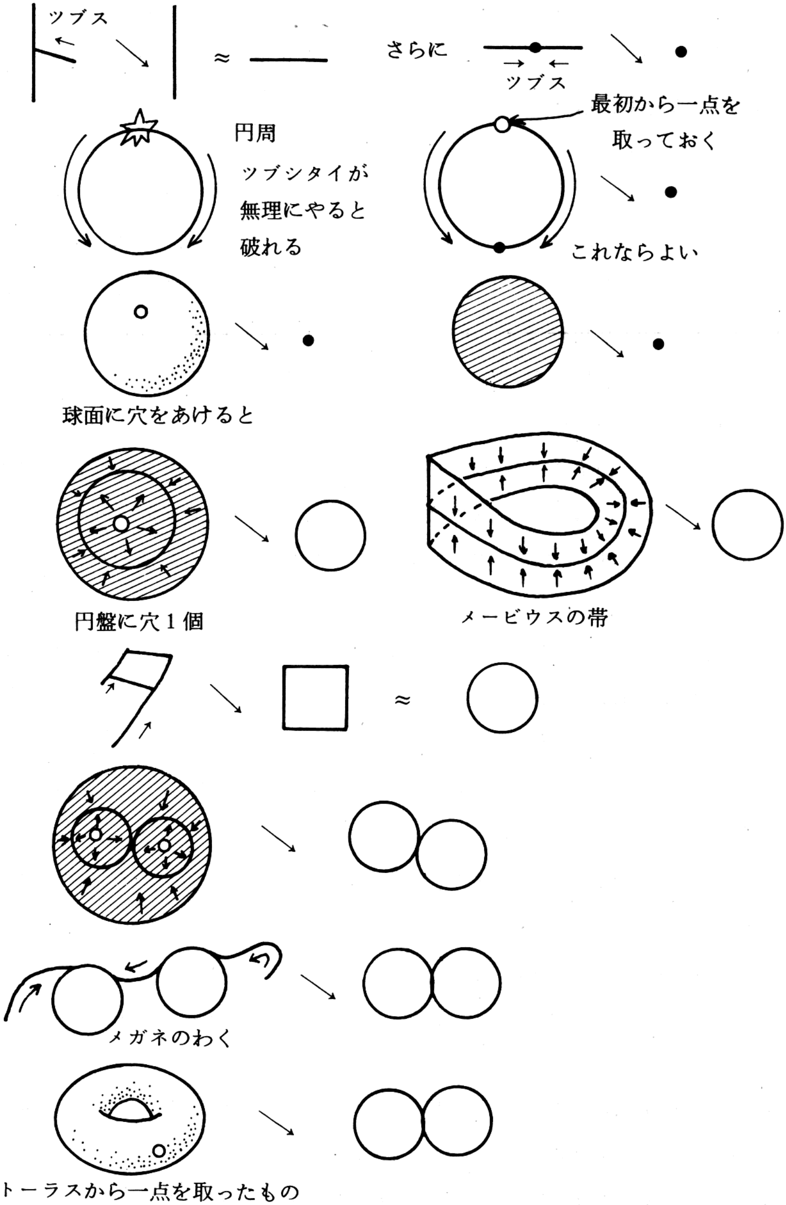

ツブス
≈
さらに
ツブス
円周
ツブシタイが
無理にやると
破れる
最初から一点を
取っておく
これならよい
球面に穴をあけると
円盤に穴1個
メービウスの帯
≈
メガネのわく
トーラスから一点を取ったもの

図22

と書きます．また，同相なものはこの場合も同じにしておきます．

●浮き輪に穴をあけると　前ページの図22のように，円周をつぶして一点にしようとすると，必ずどこかを切らなければなりません．これが“連続的変形”に引っ掛かってしまうのです．

さて，特に，一点につぶれるものは，（狭い意味の）**可縮**（contractible）といいます．たとえば，「ト」も「ー」も可縮です．また，円周から一点を取り除けば，やはり可縮です．たとえば，球面から一点をとってもやはり可縮だということは風船に針で穴をあけてみればすぐ分かります．さらに，円盤とか球（球面の中身の詰まったもの）なども可縮であることが分かるでしょう．また，片仮名の文字の大部分は可縮です．半濁音を除くと，わずかに「ロ」と「タ」のみが，可縮ではありません．この点で平仮名の方がずっと難しい字なのです．可縮な空間は最も簡単な空間だということを頭に入れておいてください．

中身の詰まったドーナツとか円盤に穴を１つあけたものとか，**メービウスの帯**（Möbius band），あるいは「タ」，「ロ」という字などは円周につぶれます．

また，円盤に２つ穴をあけたものとか，眼鏡の枠などは「８」の字につぶれます．

あるいは少しむずかしいですが，８の字につぶれるものとして，次の空間もあります．ドーナツの表面あるいは浮き輪のことを**トーラス**（torus）といいます．このトーラスに穴を一個あけるのです．

まだ，いろいろありますが，球面は，穴をあけなければ他のものにはつぶれません．

さて，これを用いて新たなる同値の考え方を導入します．それは，**同型**（homotopy equivalent）というものです．

きちんと同型を定義するのは大変ですから，ここではよく代用する方法を用います．かなりの場合は一致しているので，勘弁してください．もし，正

確な定義を知りたいのなら，参考文献［7］などを見てください．

A と B が同型（$A \simeq B$ と書く）とは，次のような列が作れるときです．

$$A \searrow A_1 \swarrow A_2 \searrow A_3 \swarrow A_4 \searrow \cdots\cdots A_n \swarrow B$$

この同型の分類でいけばさきほどより，かなり粗い分け方になります．たとえば「ト」≃「ー」≃「・」≃「エ」です．(図23 参照)

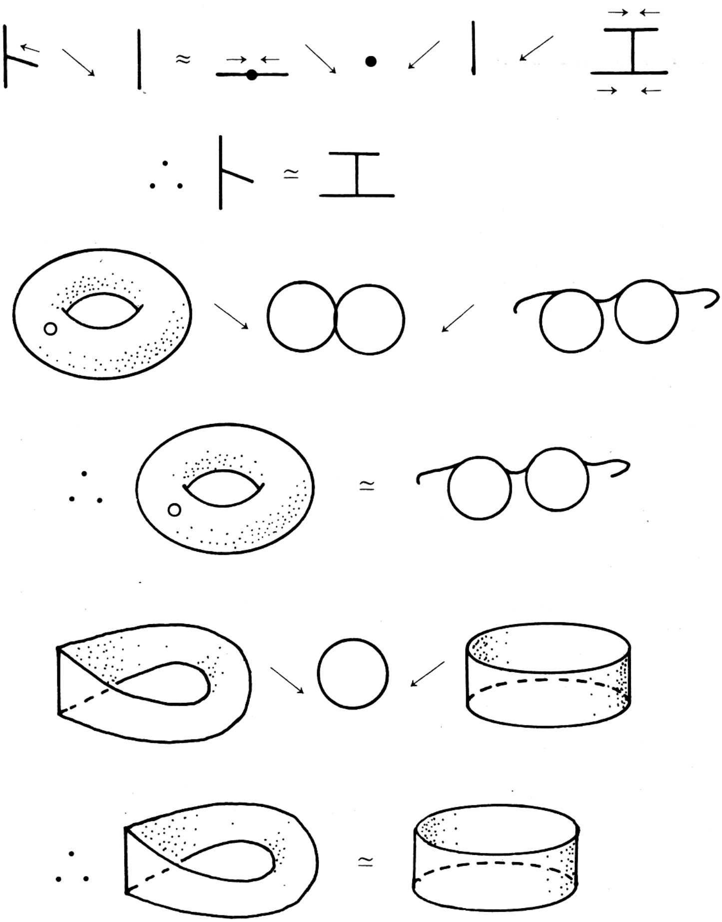


図23

●ビング氏の不思議な家　でも，こんなに粗い分類によっても異なるものもあります．あるからこそ，分類の意味があるのであって，分類しても，みんな同じ種類ではおもしろくありません．

さて，歴史的に有名な反例をお目にかけましょう．狭い意味の可縮な空間は簡単と言いましたが，一点と同型な空間もやはり，同型の分類のなかでは簡単なものです．これを**広い意味の可縮**といいます．もちろん，狭い意味の可縮なら，一点と同型ですから，広い意味の可縮です．では，逆は成り立つのでしょうか．式に直すと，

$$A \simeq \cdot \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad A \searrow \cdot$$

つまり，

$$A \searrow B \swarrow \cdots \searrow \cdot \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad A \searrow \cdot$$

ということです．いままでに挙げた例では，すべて成り立っています．だから，ほとんど成り立ちそうに思えました．

ところが，これにも反例があるのです．それが次のページの例（図24）です．作った人の名を取って，**ビング・ハウス**（Bing house）と呼ばれています．分かりやすいように，切り口も描いてあります．

実際に $P \simeq \cdot$ をいうためには，B^3（球体）$\approx P \times I$（Pに厚みをつけたもの）$\searrow P$ を示すのです．$P \times I \searrow P$ は当たり前ですから，$B^3 \approx P \times I$ を示せばよいのです（図25参照）．なお，$P \searrow \cdot$ でないことは，どこもあいていなくてつぶし始めるべき場所が全然ないことから分かります（こういう状態を**フリー・フェイス**（free face）がないといいます）．

ビング・ハウスと同じような例として，**ダンス・ハット**（dunce hat．罰でかぶせる帽子）があります．それは，図26のように三角形の3辺を貼りあわせて作ります．やはり，これも，Dは一点につぶれないけれど，$D \times I \searrow \cdot$ なのです．（［6］参照）

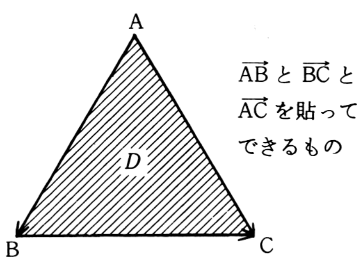
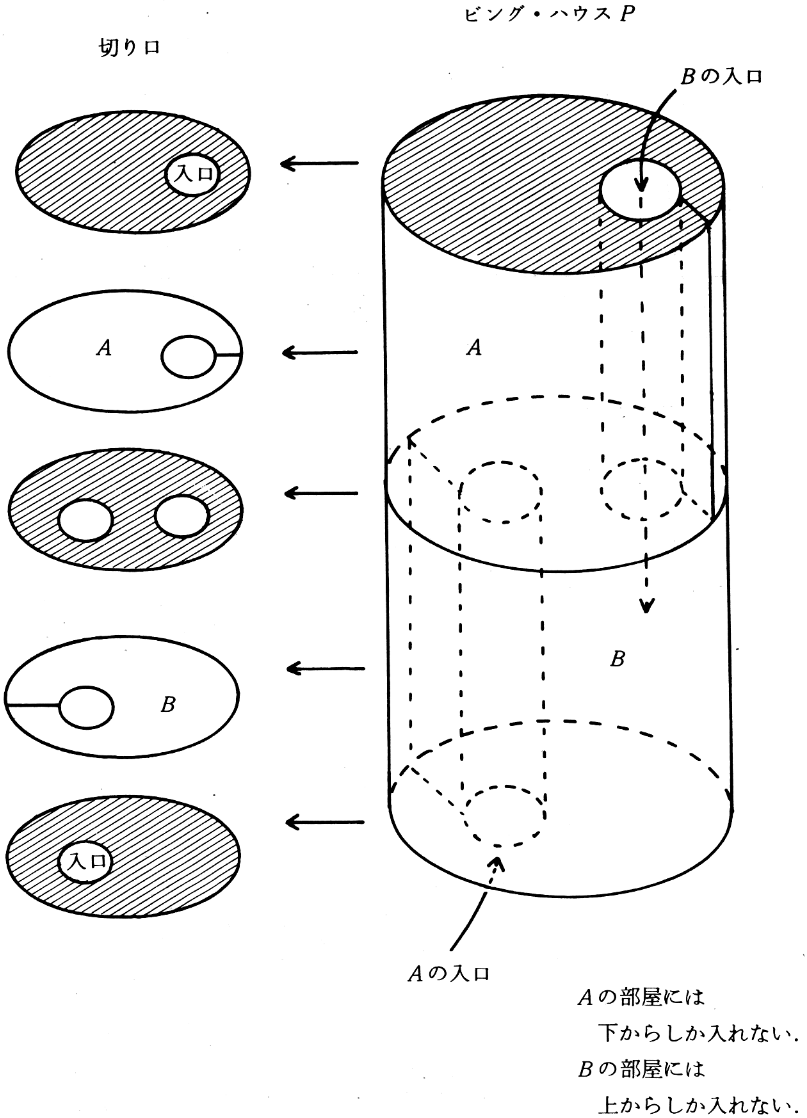


図26　ダンス・ハット



ビング・ハウス P
切り口
Bの入口
入口
A
A
B
B
入口
Aの入口
Aの部屋には
下からしか入れない.
Bの部屋には
上からしか入れない.

図24 ビング・ハウス

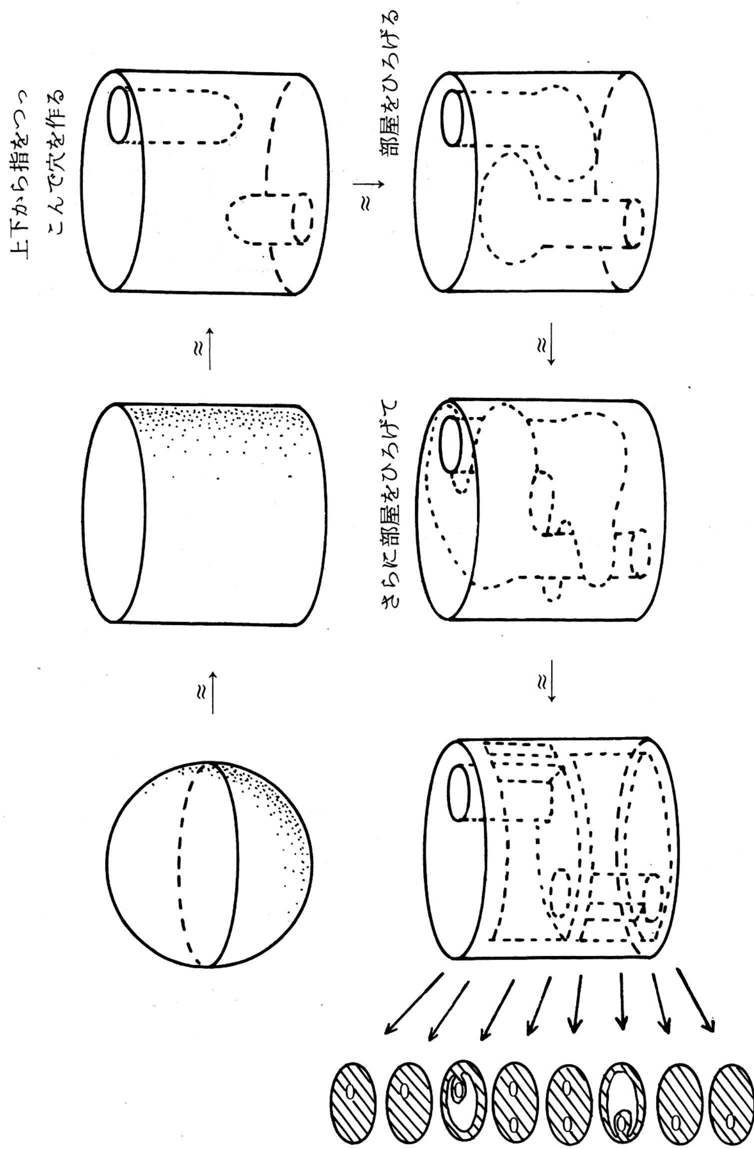


図25　B^3（球体）のねんどから，$P\times I$（Pに厚みをつけたもの）を作ってみる．

●高次元はやさしい？　　この反例は，実は位相幾何学の大問題である，**ポアンカレ予想**(Poincaré conjecture)に関係しています．ポアンカレ予想とは，簡単に粗っぽく言うと，「n次元球面と同型な多様体はn次元球面と同相になる」というものです．n次元球面をS^nとしたとき，この予想は次のように書き直せるでしょう．

$$S^n \simeq M \overset{?}{\Longrightarrow} S^n \approx M$$

なお，S^1は円周で$\{(x, y); x^2+y^2=1\}$と表わせ，S^2は普通の球面で$\{(x, y, z); x^2+y^2+z^2=1\}$と表わせ，$S^3$はもう3次元のなかには表わせませんが，数式の上では$\{(x, y, z, w); x^2+y^2+z^2+w^2=1\}$と表わせ，一般に$S^n$は

$$S^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}); {x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_{n+1}}^2=1\}$$

と考えるのです．

普通nが小さいほど楽に見えます．なにせ，1次元，2次元，3次元はなんとなく目に見える感じがしますし，4次元だって時間軸を加えればなんとかなりそうです．

しかし，現実には5以上の次元のほうを，1961年に，スメール(S. Smale, 1930－　)が解いてしまいました．それにもかかわらず，3次元，4次元はなかなか解けませんでした．そして，1981年になってやっと，フリードマン(Freedman)が4次元の場合を解きました．しかし，3次元は未だに未解決です．

このポアンカレ予想の解決の順序は，「低い次元ほどやさしい」という常識に対する反例とも言えるでしょう．(この部分は［9］を参照してください．)

なお，同じような命題として，「(広い意味の)可縮な3次元多様体は，無限の広がりをもつ場合には3次元空間$\boldsymbol{R}^3$になるか」が考えられます．

むしろ，この場合のほうが単純に見えますから，「$\boldsymbol{R}^3$になるだろう」と思うと大違い．これには，すでに反例が見つかっています．(［6］などを見てください．)

また，ポアンカレが一番最初にだした予想は「もっと，ゆるい条件で成り立つだろう」というものでした（ホモロジーの条件）．これの反例はポアンカレ自身が見つけました．**ホモロジー球面**（homology sphere）といいます．（[10] を見てください．）

●反例を破ったスメール　ポアンカレ予想の高次元の場合を解いたスメールについては，次のような逸話も残っています．彼が大学院のときにだした結果（ポアンカレの予想の論文とは別のもの）によって，「球面を折り目を作らないで裏返せる」ことが示されました．ただし，折り目はダメですが，すりぬけることは一向にかまわないとします．

たとえば，円周を折り目を作らずにすりぬけさせることは不可能です．球

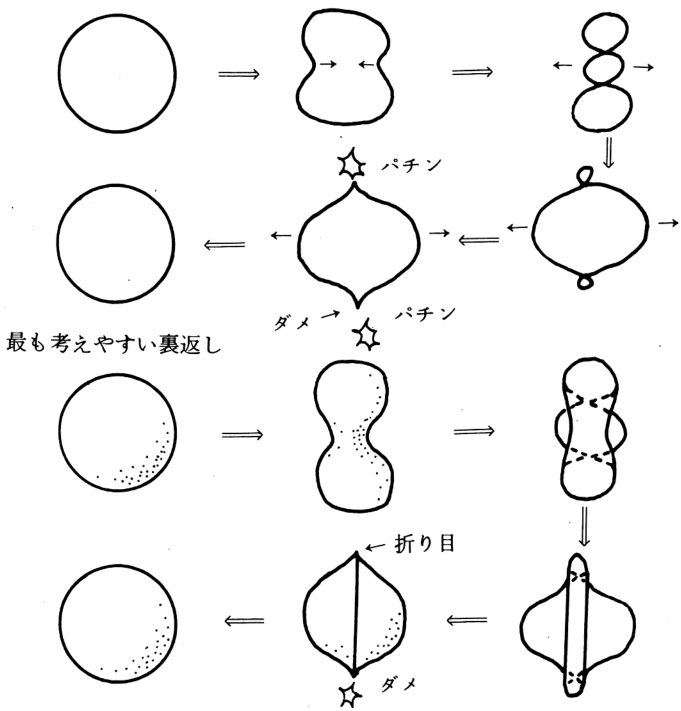


図 27

面でも普通にやると同様な気がします．（図27参照）

それで，そのときの指導教官の教授は「反例があるではないか，球面が裏返せないだろう」と言ったそうです．でも，いくら検討しても，論文に誤りがないので，球面は裏返せるらしいということになりました．実際にそのやり方が分かったのは，しばらくたってからのことだそうです．つまり，「反例」の反例ができたのです．具体的なやり方は［10］に載っています．

●なめらかにならない多様体　順序が逆になりましたが，§1で少し紹介した，ミルナーの反例にも触れておきたいと思います．

一般に多様体とは，§3で触れたように，ハウスドルフ，かつ，それぞれの点で n 次元空間と同相な空間です．その多様体になめらかさを仮定すると，**微分可能多様体** (differential manifold) になります．なめらかさは微分を用いて入れるので，こういう名前がついています．

2つの微分可能多様体 M, N について，写像

$$f: M \longrightarrow N$$

があって，f の逆写像 f^{-1} が存在し，f も f^{-1} も微分ができるとき，M と N は**微分同相**といいます．

ミルナーの反例は，「M という一つの多様体になめらかさの入れ方がいろいろあって，それらの間に微分同相写像が存在しない」という驚くべき結果です．しかも，その多様体は S^7 と同相なもので，比較的ポピュラーなものだっただけに，その衝撃は大きかったのです．（［12］参照）

この後，さらに，田村一郎がもっと複雑な多様体でいくつものなめらかさの入れ方のある例を出しました（［13］参照）．また，ケルベア（M. Kervair）が，「いかなる微分可能多様体の構造ももたないような多様体の例」を提出しました．これは，どのようになめらかにしようとしても，なめらかにならない多様体なのです．

これらの反例は，微分位相幾何学が位相幾何学のなかで独自の地位を得るにあたって，大きな役割を果たしたのです．

●参考文献

各§の参考文献としては，以下のものがよいでしょう．

§2

[1] ユークリッド（中村幸四郎他訳）：ユークリッド原論，共立出版．

[2] 寺阪英孝：非ユークリッド幾何の世界，講談社ブルーバックス．

[3] 寺阪英孝（編）：現代数学小事典，講談社ブルーバックス．

[3]には，筆者も執筆者の末席を汚しています．

§3

[4] 河田敬義，三村征雄：現代数学概説 II，岩波書店．

[5] 岡部恒治：位相問答，数学セミナー，1983年12月号，日本評論社．

§4　トポロジー全般について

[6] 本間龍雄（監修）：新しいトポロジー，講談社ブルーバックス．

[7] 田村一郎：トポロジー，岩波書店．

[8] 本間龍雄，岡部恒治：微分幾何とトポロジー入門，新曜社．

多様体について

[9] 松本幸夫：4次元ポアンカレ予想の解決，数学セミナー，1982年7月号，日本評論社．

[10] 田村一郎：多様体の多様性，数学，1969年秋季号，日本数学会．

[11] A. フィリップ（田村一郎訳）：球面を裏返す，数学セミナー，1966年12月号，日本評論社．

[12] 田村一郎：多様体の微分可能構造と特性類について，数学，1959年2月号，日本数学会．

[13] 田村一郎：$n-1$ 連結な $2n+1$ 次元微分可能多様体の分類，数学，1964年11月号，日本数学会．

なお，この文中のいくつかの話題については「次元」という観点から，次の書で論じなおすつもりである．

[14] 岡部恒治：多次元思考法，講談社ブルーバックス．

なお，東洋大学の山下正勝氏には多大なアドバイスをいただきました．ここに感謝の意を表します．

代数学における反例

和田秀男

初等整数論

自然数の性質は，すべての数学の基礎であるから，自然数の性質をよく知ることは非常に大切である．反例を通していろいろな性質を見直してみよう．

§1　最大公約数

二つの自然数 a, b の最大公約数の求め方は，小学校時代に学んだのでやさしいと思っている人も多いであろう．たとえば $a=1470$, $b=693$ のときは，右図のように小さい数で順に割っていき，共に割り切れる数は 3 と 7 であるから，最大公約数は $3\times7=21$ となることがわかる．いつもこのようにいくだろうか．

	2)	1470	693
☆	3)	735	693
	3)	245	231
	5)	245	77
☆	7)	49	77
		7	11

反例　　$a = 1471, \qquad b = 691$

この場合，a または b を割る小さな数を探そうとしてもむだである．実は a, b 共に素数なのである．$\sqrt{691}=26.28\cdots$ 以下の素数で割っていけばいいのだが，もっといい方法がある．それは**ユークリッドの互除法**というものである．$a=bq+r$ のとき，a と b を割る数 d は r も割る．よってその数 d は b と r の公約数である．逆に，b と r を割る数は a も割る．よって，a と b の公約数となる．a と b の最大公約数を記号で (a, b) と書けば，$(a, b)=(b, r)$ がいえたわけである．上記の例の場合

$$1470 = 693\times2+84$$

$$693 = 84\times8+21$$

$$84 = 21\times4$$

であるから，$(1470, 693)=(693, 84)=(84, 21)=21$ がいえる．しかも，反例の場合は

$$
\begin{aligned}
1471 &= 691 \times 2 + 89 \\
691 &= 89 \times 7 + 68 \\
89 &= 68 \times 1 + 21 \\
68 &= 21 \times 3 + 5 \\
21 &= 5 \times 4 + 1
\end{aligned}
$$

であるから，$(1471, 691) = (691, 89) = (89, 68) = (68, 21) = (21, 5) = (5, 1) = 1$ となり，確実に最大公約数が求まる．この反例の場合，691 を素数 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 で割っていけば 691：素数 とわかるので，ユークリッドの互除法のありがたさはわからないが，a, b が10桁ほどのときは思い知らされるであろう．**ラメの定理**というものがあり，$a > b$ のとき，b の桁数の 5 倍以下の回数の割り算を実行すれば，互除法で最大公約数が求まるのである．

§2 九去法

昔より知られている検算法として，**九去法**というものがある．たとえば

$$967 \times 183 = 176961$$

のとき，各桁を加えてみると

$$
\begin{aligned}
967 &\to 9 + 6 + 7 = 22 \to 2 + 2 = 4 \\
183 &\to 1 + 8 + 3 = 12 \to 1 + 2 = 3
\end{aligned}
$$

結果を掛けてみると

$$4 \times 3 = 12 \to 1 + 2 = 3$$

右辺は

$$176961 \to 1 + 7 + 6 + 9 + 6 + 1 = 30 \to 3 + 0 = 3$$

であるから正しいであろう，という検算法である．しかし，いつでもうまくゆくわけではない．

反例 $$967 \times 183 = 176061 \ ?$$

$$176061 \to 1 + 7 + 6 + 0 + 6 + 1 = 21 \to 2 + 1 = 3$$

となり，検算をパスしてしまう．しかし計算は正しくない．九去法の本質は両辺を 9 で割った余りが等しいか否かを調べることである．余りが等しくな

ければ，当然，計算は正しくない．しかし，余りが等しいとしても計算が正しいとはいえない．とはいうものの，余りは0より8までの9通りあるから，間違った計算のうち8/9は九去法で見つけだすことはできるので，有力な検算法である．

§3　フェルマー数

歴史的に有名な反例として，**フェルマー数**に関するものがある．フェルマー（P. de Fermat, 1601—1665）は「$n \geqq 0$ に対して

$$F_n = 2^{2^n}+1 \qquad (n=0, 1, 2, 3, \cdots)$$

は素数である」と言明した．一般に

$$a_m = 2^m+1 \qquad (m=1, 2, \cdots)$$

とおくと，a_m が素数ならば $m=2^n$ であることが次のようにしていえる．

もし m が3以上の素数 p で割り切れるとし，$m=pk$ とおくと，p が奇数であることと

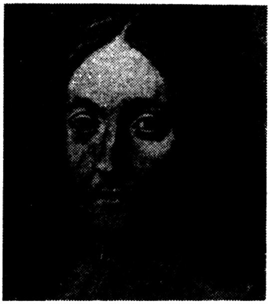
$$x^p+1 = (x+1)(x^{p-1}-x^{p-2}+\cdots-x+1)$$

より

$$a_m = 2^{pk}+1 = (2^k)^p+1$$
$$= (2^k+1)(2^{k(p-1)}-2^{k(p-2)}+\cdots-2^k+1)$$
$$2^k+1 \geqq 2+1 = 3$$
$$2^{k(p-1)}-2^{k(p-2)}+\cdots+1 \geqq 2^2-2+1 = 3$$

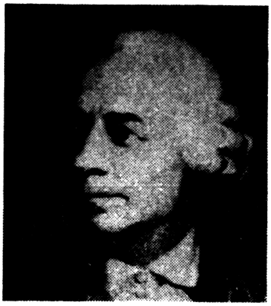
となり，a_m は合成数となってしまう．よって，a_m が素数ならば m は3以上の素数で割れないことになり，m は2でしか割れないから $m=2^n$ という形をしなければならない．フェルマーはこの逆も正しい，と言ったわけである．調べてみると

$$F_0 = 2^{2^0}+1 = 2^1+1 = 3$$
$$F_1 = 2^{2^1}+1 = 2^2+1 = 5$$
$$F_2 = 2^{2^2}+1 = 2^4+1 = 17$$
$$F_3 = 2^{2^3}+1 = 2^8+1 = 257$$



← フェルマー

オイラー →



$$F_4 = 2^{2^4}+1 = 2^{16}+1 = 65537$$

はすべて素数なので正しそうである．しかし，約100年後にオイラー（L. Euler，1707—1783）は

$$F_5 = 2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

であることを見つけた．反例は一つあればよいけれど，$n \geqq 5$ のときで F_n が合成数になるものが，97個見つかっている．それらは

$n =$ 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 36, 38, 39, 42, 52, 55, 58, 61, 62, 63, 64, 66, 71, 72, 73, 75, 77, 81, 91, 93, 99, 117, 122, 125, 142, 144, 147, 150, 201, 205, 207, 215, 226, 228, 250, 255, 267, 268, 275, 284, 287, 298, 316, 329, 334, 375, 376, 398, 416, 452, 544, 547, 556, 637, 692, 744, 906, 931, 1123, 1451, 1551, 1945, 2023, 2089, 2456, 3310, 3506, 4724, 6537, 6835, 9428, 9448, 23471

である．逆に，F_n で素数になる例は $n \geqq 5$ の範囲に一つも見つかっていない．

§4　中国の一古典定理

自然数 p が3以上の素数ならば $2^{p-1}-1$ は p で割り切れる．これは**フェルマーの小定理**と呼ばれていて，次のように示すことができる．

二項係数 ${}_p\mathrm{C}_i$ は

$${}_p\mathrm{C}_i = \frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i\cdot(i-1)\cdot\cdots\cdot 1}$$

であるから，$1 \leqq i \leqq p-1$ のとき分母は p で割れないが，分子は p で割れる．よって，${}_p\mathrm{C}_i$ は p で割り切れる．よって，

$$(1+1)^p = {}_p\mathrm{C}_0 + {}_p\mathrm{C}_1 + {}_p\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} + {}_p\mathrm{C}_p$$
$$= 1 + ({}_p\mathrm{C}_1 + {}_p\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1}) + 1$$

となり，かっこの中は p で割れる．よって 2^p-2 は p で割れる．$2^p-2 = 2(2^{p-1}-1)$ であるから，$2^{p-1}-1$ が p で割れることがわかる．

$2^{n-1}-1$ はどのように素因子分解されるか調べてみると次のようになった．

$$2^{3-1}-1 = 3$$
$$2^{4-1}-1 = 7$$
$$2^{5-1}-1 = 3 \times 5$$
$$2^{6-1}-1 = 31$$
$$2^{7-1}-1 = 3 \times 3 \times 7$$
$$2^{8-1}-1 = 127$$
$$2^{9-1}-1 = 3 \times 5 \times 17$$
$$2^{10-1}-1 = 7 \times 73$$
$$2^{11-1}-1 = 3 \times 11 \times 31$$
$$2^{12-1}-1 = 23 \times 89$$
$$2^{13-1}-1 = 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$$
$$2^{14-1}-1 = 8191$$
$$2^{15-1}-1 = 3 \times 43 \times 127$$
$$2^{16-1}-1 = 7 \times 31 \times 151$$
$$2^{17-1}-1 = 3 \times 5 \times 17 \times 257$$
$$2^{18-1}-1 = 131071$$
$$2^{19-1}-1 = 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 19 \times 73$$
$$2^{20-1}-1 = 524287$$
$$2^{21-1}-1 = 3 \times 5 \times 5 \times 11 \times 31 \times 41$$
$$2^{22-1}-1 = 7 \times 7 \times 127 \times 337$$
$$2^{23-1}-1 = 3 \times 23 \times 89 \times 683$$

$$2^{24-1}-1 = 47 \times 178481$$

$$2^{25-1}-1 = 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17 \times 241$$

$$2^{26-1}-1 = 31 \times 601 \times 1801$$

$$2^{27-1}-1 = 3 \times 2731 \times 8191$$

$$2^{28-1}-1 = 7 \times 73 \times 262657$$

$$2^{29-1}-1 = 3 \times 5 \times 29 \times 43 \times 113 \times 127$$

$$2^{30-1}-1 = 233 \times 1103 \times 2089$$

$$2^{31-1}-1 = 3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 31 \times 151 \times 331$$

$$2^{32-1}-1 = 2147483647$$

$$2^{33-1}-1 = 3 \times 5 \times 17 \times 257 \times 65537$$

となり，ここで私のマイコンは止まってしまった．ともかく，n が素数ならば $2^{n-1}-1$ は n で割れることは確かであるが，n が合成数のときは $2^{n-1}-1$ が n で割れない．中国では古くからこのことに気づき，$2^{n-1}-1$ が n で割れれば n は素数である，と信じていた．微積分学を作りだしたライプニッツ（G. W. Leibniz, 1646−1716）でさえ中国の文献を読み，フェルマーの小定理の逆を信じていた．$2^{n-1}-1$ が n で割れるか否かだけの計算ならば，比較的容易であるから読者も実行すると面白いと思う．$n<341$ まではうまくいくはずである．しかし，1819年にフランスの数学者であるサルー（P. F. Sarrus）は，341 は 11×31 となる合成数であるにもかかわらず $2^{341-1}-1$ は 341 で割れることを示した．強引に計算してもよいが，

$$\begin{aligned}2^{341-1}-1 &= 2^{340}-1 = (2^{10})^{34}-1 = (2^{10}-1)(2^{10\cdot 33}+2^{10\cdot 32}+\cdots+2^{10}+1)\\ &= (2^5-1)(2^5+1)(2^{10\cdot 33}+2^{10\cdot 32}+\cdots+2^{10}+1)\\ &= 31 \times 33 \times (2^{10\cdot 33}+2^{10\cdot 32}+\cdots+2^{10}+1)\\ &= 31 \times 11 \times 3 \times (2^{10\cdot 33}+2^{10\cdot 32}+\cdots+2^{10}+1)\\ &= 341 \times 3 \times (2^{10\cdot 33}+2^{10\cdot 32}+\cdots+2^{10}+1)\end{aligned}$$

となり，反例であることがわかる．

やはり証明できないことは信用すべきではない．証明とは，数学に興味をもつすべての人に納得させる手段である．“多くの n で成立するからすべて

の n で成立する”という論法では納得してはいけない．証明とは，どのようにひねくれた人にもなるほどと思わせる力をもっていなければいけない．ギリシャ人にはひねくれた人が多かったから，証明という手段が発達したのである．“真理とは，徹底的に疑ったあとに得られる”というギリシャ人の信念は貴いものである．

§5　メルセンヌ素数

フェルマー数と並んで有名な数に，**メルセンヌ素数**というものがある．これは 2^m-1 という形をした素数のことだが，m が合成数ならば $m=a\cdot b$ $(1<a, b)$ とおくと

$$2^m-1=2^{a\cdot b}-1=(2^a)^b-1$$
$$=(2^a-1)(2^{a(b-1)}+\cdots+2^a+1)$$
$$2^a-1\geqq 2^2-1=3$$
$$2^{a(b-1)}+\cdots+2^a+1\geqq 2^a+1\geqq 2^2+1=5$$

となり，2^m-1 は合成数になってしまう．よって，2^m-1 が素数ならば，m が素数でなければならない．逆はどうだろうか．

$$2^2-1=3$$
$$2^3-1=7$$
$$2^5-1=31$$
$$2^7-1=127$$

は素数である．これはギリシャ時代に知られていた．では，いつでも素数だろうか．

反例　　$$2^{11}-1=2047=23\times 89$$

この例は，さすがに中世には知られていた．それどころか，p が 11 以上の素数のとき，2^p-1 が素数になることは稀であることが実験的に確かめられている．2^p-1 が素数になる例は $p\leqq 216091$ の範囲では 31 個見つかっている．それらは

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281,

3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091

である．$2^{216091}-1$ は現在人類が知っている最大の素数である．人類の知っている素数は有限個しかないのである．こう書くと，素数は無限にあることが証明されているのだから，人類は無限に多くの素数を知っているはずだ，おかしいではないか，と思う人も多いだろう．素数が無限にある，というギリシャ時代の証明を見直してみよう．

証明　もし，素数が有限個しかないとしたら，それらを小さい順に $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_m$ としよう．

$$p = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_m + 1$$

とおく．p はどの素数 $p_1, \cdots, p_m$ より大きいから合成数のはずである．ところが，もし p が合成数ならば，素数で割り切れるはずである．素数は $p_1, p_2, \cdots, p_m$ しかないから，これらのどれかで割れるはずである．ところが $p_1, p_2, \cdots, p_m$ のどれで割っても 1 余るから，p は合成数ではない．(証明終)

この証明を見て，小さい順に素数を $p_1, p_2, \cdots$ と並べ，$p = p_1 \times \cdots \times p_m + 1$ とすれば p は新しい素数だから，素数はいくらでも作れるではないか，と思ってはいけない．p の値を計算してみると，

$$2+1 = 3$$
$$2\cdot3+1 = 7$$
$$2\cdot3\cdot5+1 = 31$$
$$2\cdot3\cdot5\cdot7+1 = 211$$
$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11+1 = 2311$$

は素数であるので，いつも素数のような気がする．

反例　$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13+1 = 30031 = 59 \times 509$

素数が無限にある，という証明と，この例とは矛盾しないのだろうか．証明をよく読むと，$p_1 \cdot p_2 \cdots p_m + 1$ は $p_1, p_2, \cdots, p_m$ では割れない，ということしかいっていない．p_m より大きな素数で割れるかもしれない．よって，証明とこの例とは矛盾しないのである．またこの証明は，もし素数が有限個しか

ないとしたら矛盾が生ずる，という論法であり，無限個の素数を作りだす，という証明ではない．このようなわけで，現実には人類は有限個しか素数を知らないわけである．

メルセンヌ素数に話をもどそう．$p=19937$ のとき 2^p-1 が素数だとわかったのは，1971年世界最高速の計算機を長時間使用してやっと得た結果であった．よって $p>19937$ 以上の場合を調べるのは，ほとんど不可能だと思われていた．

反例　1978年に18歳の高校生であるノル（C.L. Noll）君とニッケル（L. Nickel）嬢は共同で，$2^{21701}-1$ は素数であることを発見した．

このとき，高校生でも数学上の新しい発見ができる，というので新聞紙上を賑(にぎわ)した．近い将来，マイコン少年が新しい発見をすることも起こるであろう．

§6　素数の分布

素数の中で，3で割ると1余る数は

$$7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, \cdots$$

と無限にあることが知られている．同様に，3で割ると2余る素数も

$$2, 5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, \cdots$$

と無限にある．では，どちらがより多くあるだろうか．どちらも無限にあるから比べられないと言う人もいるが，たとえば100以下には3で割り1余る素数が11個，2余る素数が13個あるので，2余る方が少し多い．より正確に調べるために

$$f(x)=（x \text{ 以下で3で割れば1余る素数の個数}）$$
$$-（x \text{ 以下で3で割れば2余る素数の個数}）$$

とおくと，$f(100)=-2$ となる．$f(x)$ の表を作ってみると

x	1	2	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53
$f(x)$	0	−1	−2	−1	−2	−1	−2	−1	−2	−3	−2	−1	−2	−1	−2	−3

x	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131
$f(x)$	−4	−3	−2	−3	−2	−1	−2	−3	−2	−3	−2	−3	−2	−3	−2	−3

x	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199
$f(x)$	-4	-3	-4	-3	-2	-1	-2	-3	-4	-3	-4	-3	-4	-3

となる．マイコンを少し使ってみると，$f(1000)=-7$，$f(10000)=-6$，$f(100000)=-23$，$f(1000000)=-35$ 等が得られるが，いつまでたっても $f(x)>0$ となる x は見つからない．永遠に $f(x)<0$ なのだろうか？

反例 $$f(608981813029)=1$$

(1978，ベイ (C. Bays) とハドソン (R. H. Hudson))

これは計算機を使って得られた結果だが，$x<608981813029$ のときは $f(x)\leqq 0$ であることも確かめられている．

同じように，4 で割り 1 余る素数と 3 余る素数を考えてみよう．4 で割り 1 余る素数は

$$5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, \cdots$$

となり，3 余る素数は

$$3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, \cdots$$

となるので，

$g(x)=$ (x 以下で 4 で割れば 1 余る素数の個数)

$-$(x 以下で 4 で割れば 3 余る素数の個数)

とおくと，$g(100)=-2$ となり，表を作ると

x	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53
$g(x)$	-1	0	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1

x	59	61	67	71	73	79	83	89	97	$\cdots$
$g(x)$	-2	-1	-2	-3	-2	-3	-4	-3	-2	$\cdots$

となる．手でだいぶ計算しても $g(x)\leqq 0$ であるが，計算機を使って次の反例が得られる．

反例 $g(26862)=1$ (1959，シャンクス (D. Shanks))

$x<26862$ では，いつも $g(x)\leqq 0$ である．

自然数を素因子分解したとき，素因子の個数が偶数のときと奇数のときとどちらが多いだろうか．

0 個の積：1

1個の積：2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, …

2個の積：4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26, …

3個の積：8, 12, 18, 20, 28, 30, …

4個の積：16, 24, …

であるから，

$h(x)$ = (x 以下の自然数で，偶数個の素因子をもつ数の個数)

− (x 以下の自然数で，奇数個の素因子をもつ数の個数)

とおくと，$h(x)$ の表は次のようになる．

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$h(x)$	1	0	−1	0	−1	0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−3	−2	−1

x	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$h(x)$	0	−1	−2	−3	−4	−3	−2	−3	−2	−1	0	−1	−2	−3	−4

$h(1) > 0$ であるが，それ以外は $h(x) \leqq 0$ となる．マイコンを使ってみても，いつまでたっても $h(x) \leqq 0$ となり，たとえば

$$h(100) = -2$$

$$h(1000) = -14$$

$$h(10000) = -94$$

となる．いつまでいっても正にならないのだろうか．

反例　　$h(906150257) = 1$　　(1980，田中　穣)

これが最小の反例である．

§7　素因子分解の一意性

自然数を素数の積に直す方法はただ一通りしかないことは，だれも信じて疑がわない．いままでに2通りに分解されたことがないからである．ところで，**フェルマーの大定理**，つまり

$$x^n + y^n = z^n$$

が $n \geqq 3$ ならば，この式を満たす自然数 x, y, z は存在しない，という大定理を証明しようとするとき，自然数よりも大きな数の集合の中で考えた方が

本質的な部分がはっきりするようになった．たとえば $x^4+y^4=z^4$ には自然数解がないことを示すのに，$a+b\sqrt{-1}$（a と b は整数）という形をした複素数全体を考えた方が見通しがよくなる．同様に，$x^3+y^3=z^3$ には自然数解がないことを示すには，$a+b\sqrt{-3}$（a と b は整数）という形をした複素数全体を考えた方がよい．オイラーはこのことに気づき，2通りの証明をした．一つは自然数の範囲ですべて証明するものであり，完全なものであった．もう一つは $\sqrt{-3}$ を使うものであったが，$a+b\sqrt{-3}$ の形の扱い方には馴れていなかったので，オイラーですらずいぶんあやしげな推論を行なった．自然数で成り立つ性質は $a+b\sqrt{-3}$ という形の数に対しても成り立つような気持が直観的にするので，証明なしに話を進めてしまうからである．

たとえば，$a+b\sqrt{-3}$（a と b は整数）という形をした数を加えても掛けても同じ形をしているので，倍数とか約数という概念は定義することができる．また，真の約数をもたない数を素数と定義すれば，素因子分解などもできることはわかる．しかし，素因子分解は一意的だ，ということは，あたりまえのような気もするが，注意深く考えれば，証明しなければいけないことであることもだんだんわかってくる．はっきりさせるために，

$$a+b\sqrt{-5} \qquad (a \text{ と } b \text{ は整数})$$

という形の数全体を考えよう．

$$(5+3\sqrt{-5})+(8+6\sqrt{-5}) = 13+9\sqrt{-5}$$

$$\begin{aligned}(5+3\sqrt{-5})\cdot(8+6\sqrt{-5}) &= 40+30\sqrt{-5}+24\sqrt{-5}-18\times 5\\ &= -50+54\sqrt{-5} \qquad (-50 \text{ と } 54 \text{ も整数})\end{aligned}$$

となるので，このような形をした数を二つ足しても掛けても，同じ形をしている．

$$\alpha = a+b\sqrt{-5}$$

$$\beta = c+d\sqrt{-5}$$

のとき，

$$\alpha+\beta = (a+c)+(b+d)\sqrt{-5}$$

$$\alpha\cdot\beta = (ac-5bd)+(ad+bc)\sqrt{-5}$$

となるわけである．$\gamma=\alpha\cdot\beta$ のとき，γ を α の倍数といい，α を γ の約数と呼ぶことにしよう．また，真の約数をもたない数を**素数**と呼ぶことにしよう．つまり，$\alpha=1\cdot\alpha=(-1)(-\alpha)$ 以外の分解ができない数である．どのような数が素数になるか考えよう．そのために有力な武器として，$\alpha=a+b\sqrt{-5}$ の複素共役を $\overline{\alpha}=a-b\sqrt{-5}$ とすると

$$\alpha\overline{\alpha}=(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})=a^2+5b^2$$

となることを利用しよう．

$a+b\sqrt{-5}$ の中で $b=0$ のときは $a+b\sqrt{-5}=a$ となる．つまり，整数そのものは $a+b\sqrt{-5}$ という数の集まりに含まれている．しかし

$$29=(3+2\sqrt{-5})(3-2\sqrt{-5})$$

が示すように，いままで素数であった数も $a+b\sqrt{-5}$ という数の集まりの中では素数でなくなる．しかし，3 はやはり素数である．もし

$$3=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})$$

となったならば，その複素共役を作ると

$$\begin{aligned}\overline{3}&=\overline{(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})}\\&=\overline{(a+b\sqrt{-5})}\cdot\overline{(c+d\sqrt{-5})}\\&=(a-b\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})\end{aligned}$$

となる．$\overline{3}=3$ であるから

$$\begin{aligned}9=3\cdot\overline{3}&=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})\\&=(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})\\&=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)\end{aligned}$$

となる．$a^2+5b^2=1$ となるのは $b=0, a=\pm1$ しかない．よって $a+b\sqrt{-5}$ が真の約数ならば，$1<a^2+5b^2$ となる．同様に $1<c^2+5d^2$ となる．掛けたものが 9 になるには

$$a^2+5b^2=c^2+5d^2=3$$

でなければならない．b が 0 でなければ $a^2+5b^2\geqq5$ となるので，$b=0$ となる．しかし，$a^2=3$ となる整数はないのでおかしい．よって，3 が素数であることが証明された．同様に 7 も素数である．$a^2+5b^2=7$ となる整数 a,

b がないからである．このようにいままで素数であったものが，$a+b\sqrt{-5}$ の数の集合の中では素数になったり，合成数になったりする．また，新しい素数も現われる．

$\alpha=4+\sqrt{-5}$ とおくと，α は素数であることが次のように示される．

$$\alpha = 4+\sqrt{-5} = (a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})$$

となる真の約数 $a+b\sqrt{-5}$, $c+d\sqrt{-5}$ があったとすると，複素共役を作り

$$\overline{\alpha} = 4-\sqrt{-5} = (a-b\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})$$

を使うと

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha} &= (a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})\\ &= (a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})\\ &= (a^2+5b^2)(c^2+5d^2)\end{aligned}$$

となる．$\alpha\overline{\alpha}=4^2+5=21$ であるから

$$a^2+5b^2 = 3,\ \ c^2+5d^2 = 7 \quad \text{または} \quad a^2+5b^2 = 7,\ \ c^2+5d^2 = 3$$

となる．ところが，これらを満たす整数はないので，$4+\sqrt{-5}$ が素数であることがわかった．同様に $4-\sqrt{-5}$ も素数である．さて，次に示す恐ろしい反例は何を意味するのだろうか．

反例　$$21 = 3\cdot 7 = (4+\sqrt{-5})(4-\sqrt{-5})$$

21が2通りに素因子分解されてしまった！ いままで考えられていた常識が成り立たないのである．$a+b\sqrt{-3}$ の数の集まりの中では，幸い素因子分解の一意性は成り立つ．さすがオイラーはこのことをはっきりと意識し，その証明を書いた文献が近年見つかった．

§8　数学的帰納法

なんとなくおかしい，という気はするけれど，皆が正しい正しい，と言っているので，だんだん信ずるようになった，というものの一つが“数学的帰納法”であろう．ある性質が，

（1）　$n=1$ のときは正しい

（2）　$n-1$ のとき正しければ，n のときも正しい

がわかれば，すべての自然数に対しても正しい，という論法である．(1) より 1 のとき正しいのだから (2) より 2 のときも正しい，よって (2) より 3 のときも正しい．同様に続けてゆけばどんどん先に進むから，すべての自然数で正しいはずだ，という論法は強力な説得力がある．しかし，本当にいいのだろうか．どんどん先に進んでも，最後まで行けないのだから，なにか奇妙な気持がする，という人は，よほど注意力のある人であろう．このことを考える前に，ともかく数学的帰納法は正しく使わなければいけない例をあげよう．

反例　すべての自然数は 1 と等しい(!?)

証明　自然数の中で最大な数を n としよう．n^2 も自然数だから n の最大性により，$n^2 \leqq n$ となる．両辺を n で割れば，$n \leqq 1$ となる．$1 \leqq n$ であるから，$1 = n$ となる．最大な自然数が 1 だから，すべての自然数は 1 に等しい．(証明終)

上記の証明のどこが正しくどこが誤りか，正しく判別できるだろうか．最大の自然数 n があると思うところが誤りである．それ以外の部分は完全に正しい．最大の自然数はないのだろうか．次のような証明は，どこがまちがいなのか．

反例　すべての自然数よりずっと大きい自然数が存在する(!?)

証明　非常に大きな自然数を M とする．1 より M はずっと大きいので，(1) が成り立つ．$n-1$ より M がずっと大きければ，n より M はずっと大きい．よって (2) も成り立つので，すべての自然数より M はずっと大きい．

(証明終)

この証明がもし正しいならば，すべての自然数より M は大きいのだから M が最大の自然数になってしまう．では証明のどこがいけないのだろう．全体がぼんやりとした議論である．“非常に大きな自然数”とか“ずっと大きい”という言い方が曖昧である．この点が証明の欠点である．よって“証明”に値しない．どのような証明も，ぼんやりした言葉を使ってはいけないのである．もう少しまともな議論をしよう．

反例　すべての自然数は等しい．つまり a, b を自然数とすれば必ず $a=b$ となる（!?）

証明　a と b の大きい方を n とし，n に関する帰納法を使おう．$n=1$ のとき，a と b の大きい方が 1 なのだから $a=b=1$ が成り立つ．$n-1$ まで正しいとして，n のときも成り立つことを示そう．a と b の大きい方が n なのだから，$a-1$ と $b-1$ の大きい方は $n-1$ である．よって帰納法の仮定より，$a-1=b-1$ が得られる．よって $a=b$ となり，証明が完成した．（証明終）

すべての言葉がはっきりしているので，一見この証明は正しそうに見える．しかし，証明された結果は明らかにおかしい．証明のどこがいけないのだろうか．$n=1$ のときの議論は正しい．a と b の大きい方を n とすれば，$a-1$ と $b-1$ の大きい方は確かに $n-1$ である．ここで帰納法の仮定が満たされていると思ってはいけない．$a=1$, $b=2$ のときを考えればたちまち理由がわかるであろう．$a-1$ および $b-1$ が自然数でなければいけないのである．

話を元にもどそう．一歩一歩進んでいっても，決して無限の彼方までは行きつけない．ギリシャ時代に，次のようなパラドックスがあった．

アキレスという非常に速く走れる人がいた．あるとき，アキレスの前を亀が歩いていたので，追いつこうと思った．亀が始めにいた位置までアキレスが走ると，亀は少し前に進んでいた．アキレスはまた少し走ると，亀はほんの少し前に進んでいた．このようにアキレスが亀のいた位置まで走っても，亀はさらに前に進んでいるので，アキレスは亀に追いつくことができない．

実際にアキレスと亀を走らせてみれば，アキレスは亀に追いつくので，この議論はどこかおかしい．どの部分がおかしいかは読者が考えることにして，自然数の場合にあてはめてみよう．

（1）が出発点である．1 より大きい自然数はあるので，（2）により一歩進む．すると，さらに先に自然数はあるので，（2）によりさらに一歩進む．しかし，いつまで一歩ずつ前に出ても，さらに大きな自然数はあるのだから，いつまでたっても終わるはずがない．

このようなへりくつを言う人がいるので，現在では次のような公理を作り，この公理より議論を進めることになっている．

ペアノの公理　自然数全体の集合を $\boldsymbol{N}$ とし，その部分集合 M が

（i）　$M \ni 1$

（ii）　$M \ni n-1$ のときは $M \ni n$ となる

ならば，$M=\boldsymbol{N}$ となる．（公理終）

この公理を用いると，数学的帰納法は次のように正当化される．ある性質を満たす自然数の集まりを M とする．（1）より $M \ni 1$ がいえる．（2）より $M \ni n-1$ ならば $M \ni n$ である．よって（i），(ii) が成り立つので $M=\boldsymbol{N}$ となる．つまり，すべての自然数で成り立つことが証明されたわけである．このように数学的帰納法は，ペアノの公理により安心して使ってよいわけである．安心できるといっても，次のような場合，注意が必要である．

反例　$f(n)=n!$（n の階乗）の定義を次のようにする．

$$f(1)=1, \qquad f(n)=f(n-1)\times n$$

数学的帰納法により，すべての自然数で $f(n)$ は定義された！

反省　上記の，数学的帰納法による $f(n)$ の定義は，ペアノの公理から直接にはでてこない．$f(n)$ をこれから定義しようというのに，$f(n)$ が定義されている n の集まり M を考えよう，とするところがそもそも無理である．結果的には正しい定義の仕方だが，正しいことを保証するためにはもう一つ山を越えねばならないのである．

§9　オイラーの予想

オイラーは，

$$x^3+y^3=z^3$$

には自然数解がないことを証明した．一般にフェルマーの大定理は，n が 3 以上ならば

$$x^n+y^n=z^n \qquad (n \geqq 3)$$

には自然数解がない，というものである．オイラーは，この条件をゆるめて

$$x^4+y^4+z^4=u^4$$

$$x^5+y^5+z^5+u^5=v^5$$

$$\vdots$$

$$x_1{}^n+x_2{}^n+\cdots+x_{n-1}{}^n=x_n{}^n$$

にも自然数解がない，と予想した．

反例　$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$

この反例により，フェルマーの大定理は証明できなくとも，オイラーの予想は証明できそうだ，と思って研究していた学者は大打撃を受けた．

1988年2月10日の朝日新聞の夕刊に，

$$95800^4+217519^4+414560^4=422481^4$$

という反例も作られたことが報道された．コンピュータのなかった時代には

$$3^3+4^3+5^3=6^3$$

$$4^4+6^4+8^4+9^4+14^4=15^4 \quad (1871年)$$

$$4^5+5^5+6^5+7^5+9^5+11^5=12^5 \quad (1887年)$$

$$30^4+120^4+272^4+315^4=353^4 \quad (1911年)$$

などという例が作られていたが，反例は作れなかった．

線型代数学

線型代数学よりのもっとも初歩的な反例を作り，注意深くなろう．

§1　四則算法

2行2列の行列

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

には，加法と乗法が定義されていて

$$A+B=\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

となることは，だれでも知っている．しかし，この加法と乗法は，普通の数の加法と乗法とは少し性質が異なる．どのくらい異なるか，はっきりさせてみよう．通常の加法と乗法の性質を正確に書き並べてみると，

（1）　$(a+b)+c=a+(b+c)$

（2）　$a+b=b+a$

（3）　$0+a=a$

（4）　$(-a)+a=0$

（5）　$(ab)c=a(bc)$

（6）　$ab=ba$

（7）　$1\cdot a=a$

（8）　$a\neq 0$ ならば a^{-1} があり，$a^{-1}a=1$

（9）　$a(b+c)=ab+ac$

となる．このうち，行列でも成立するものと，そうでないものとに分類してみよう．(1), (2) はいつでも成立する．

$$O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad -A=\begin{bmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{bmatrix}$$

とすれば，(3), (4) は成立する．少し計算すれば (5) も成立する．しかし，(6) は成立しない．

反例　$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ とすれば，

$$AB=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad BA=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

となり，$AB\neq BA$ となる．(反例終)

(7) は 1 の代りに $E=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ とすればよい．しかし (8) は成立しない．

反例　$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ とすれば $A\neq O$．しかし，どのような $B=\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}$ に対しても $BA=\begin{bmatrix}0&e\\0&g\end{bmatrix}$ となるので，$BA\neq E$ となる．(反例終)

(9) は成立する．

以上で，(6), (8) 以外は成立することがわかったので，(6), (8) を使わないで得られる数の性質は，行列でも成立する．逆に，(6), (8) を使わなければ得られない数の性質は，行列にはあてはまらない．まちがいやすいような例をいろいろ作ってみよう．

数の場合，$a\neq 0$ のとき，$ba=a$ ならば両辺に a^{-1} を掛けて（つまり a で割って）$b=1$ となる．つまり (7) の逆が成り立つ．では行列において，$A\neq O$, $BA=A$ ならば $B=E$ となるだろうか．

反例　$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ のとき，$A\neq O$, $BA=A$ であるが，$B\neq E$ である．(反例終)

数において，$a \neq 0$, $ba=0$ ならば，両辺を a で割って $b=0$ となる．しかし，行列ではこうならない．

反例　$A=B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば，$BA=O$ であるが，$A \neq O$, $B \neq O$ である．

§2　2次式

四則算法に関するかぎり，行列で成り立つ性質は数で成り立つ性質の一部分のような気がする．それは，前節の（6）,（8）以外の（1）～（9）を使って得られる性質は，数でも得られるはずだからである．実数では $a^2=-1$ となる a は存在しないから，実数を成分にもつ行列においても $A^2=-E$ となる行列 A は存在しないような気がする．

反例　$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば，$A^2=-E$ となる．

どこで話が食い違ったか，よーく考えてみよう．$A^2=-E$ となるのは，決して（1）～（9）からではない．行列の具体的な乗法の定義を使っているのである．

複素数まで考えれば，$x^2=a$ は必ず二つの根をもつ．行列の場合も二つ根があるのだろうか．

反例　$A=E$ のとき，$X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

は $X^2=E$ の根である．四つも根がある．四つあるならば，もっとあるかもしれない．

$X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすれば，

$$X^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$$

より

$$a^2+bc=1, \qquad (a+d)b=0$$
$$c(a+d)=0, \qquad bc+d^2=1$$

となる．$a+d=0$ のときは $a^2+bc=1$ が成り立てばよい．この解は無限にある．たとえば，$a=1, b=0, c$：任意 とすれば，$X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ c & -1\end{bmatrix}$ は $X^2=E$ の解となり，解は無限にある．

では，$X^2=A$ の解は必ずあるのだろうか．

反例　$X^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ には解がない．

証明　$X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ とすれば，

(1)　$$a^2+bc=0$$
(2)　$$(a+d)b=1$$
(3)　$$c(a+d)=0$$
(4)　$$bc+d^2=0$$

でなければならない．(2) より $a+d\neq 0$ となり，(3) より $c=0$ となり，(1), (4) より $a=0, d=0$ となり，$a+d=0$ となってしまう．

§3　多項式

行列の積は交換可能でないし，$A\neq O, B\neq O$ でも $AB=O$ となることがあるので，多項式に関しても多くの反例を作ることができる．

$$f(x)=A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+A_0, \qquad A_n\neq O$$
$$g(x)=B_mx^m+B_{m-1}x^{m-1}+\cdots+B_0, \qquad B_m\neq O$$

のとき，$f(x)$ と $g(x)$ の積は

$$h(x)=f(x)g(x)=C_{n+m}x^{n+m}+\cdots+C_0, \qquad C_k=\sum_{i+j=k}A_iB_j$$

であるが，もちろん $f(x)g(x)=g(x)f(x)$ とは一般にはならない．$A_nB_m\neq B_mA_n$ なる行列をもってくればよい．また，$f(x)\cdot g(x)$ の次数も $n+m$

とはならない．$A_nB_m=O$ となる行列をもってくればよい．x に行列 M を代入するときは注意しなければならない．$h(M)=f(M)\cdot g(M)$ となるだろうか．

反例　$f(x)=g(x)=Ex+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ とすると，

$$h(x) = f(x)\cdot g(x) = Ex^2+\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}x$$

となる．$M=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ を代入すると，

$$f(M) = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$f(M)\cdot g(M) = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^2 = E$$

$$h(M) = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$$

となり，$h(M)\neq f(M)\cdot g(M)$ となる．(反例終)

なぜこのような食い違いができたのか，ゆっくり反省してみよう．

$B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ とすれば，$f(x)=g(x)=Ex+B$ で

$$f(M)\cdot g(M) = (M+B)(M+B) = M^2+BM+MB+B^2$$

$$h(x) = (Ex+B)(Ex+B) = Ex^2+2Bx+B^2$$

よって，x に M を代入すると

$$h(M) = M^2+2BM+B^2$$

となる．$MB\neq BM$ となることが食い違いの原因であった．逆に言えば，一般に $g(x)$ のすべての係数行列と M が交換可能ならば，$f(M)\cdot g(M)=h(M)$ が次のようにいえる．

$$f(x) = A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+A_0$$

$$g(x) = B_mx^m+B_{m-1}x^{m-1}+\cdots+B_0$$

のとき，

$$h(x)=\sum_{k=0}^{n+m}\sum_{i+j=k}A_iB_jx^k$$

であるから

$$h(M)=\sum_{k=0}^{n+m}\sum_{i+j=k}A_iB_jM^{i+j}$$

ここで B_j と M が交換可能ならば，

$$\begin{aligned}h(M)&=\sum_{i,j}(A_iM^i)(B_jM^j)\\&=\left(\sum_i A_iM^i\right)\left(\sum_j B_jM^j\right)\\&=f(M)\cdot g(M)\end{aligned}$$

となる．

x に行列を気楽に代入できないので，ほとんどの普通の多項式に関する定理は成り立たないが，たまにはうまくいくことがある．たとえば，剰余定理が成り立つ．$f(M)=O$ ならば，$f(x)$ は $(Ex-M)$ で割れて $f(x)=g(x)\cdot(Ex-M)$ となり，逆に $f(x)=g(x)(Ex-M)$ ならば $f(M)=O$ となる，という定理である．証明を注意して見直してみよう．

$f(x)$ を，通常の割り算のように，変形していこう．まず

$$A_nx^n=A_nx^{n-1}(Ex-M)+A_nMx^{n-1}$$

であるから，

$$f(x)=A_nx^{n-1}(Ex-M)+(A_nM+A_{n-1})x^{n-1}+\cdots\cdots$$

となる．同様に，x^{n-1} の係数を消すようにしていくと，

$$\begin{aligned}f(x)&=A_nx^{n-1}(Ex-M)+(A_nM+A_{n-1})x^{n-2}(Ex-M)\\&\quad+(A_nM^2+A_{n-1}M+A_{n-2})x^{n-2}+\cdots\cdots\\&=\{A_nx^{n-1}+(A_nM+A_{n-1})x^{n-2}\}(Ex-M)\\&\quad+(A_nM^2+A_{n-1}M+A_{n-2})x^{n-2}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

となる．つまり，組み立て除法と同じように計算が進んでいき，最後には

$$\begin{aligned}f(x)=&\{A_nx^{n-1}+(A_nM+A_{n-1})x^{n-2}+\cdots\cdots\\&+(A_nM^{n-1}+A_{n-1}M^{n-2}+\cdots+A_1)\}(Ex-M)\\&+A_nM^n+A_{n-1}M^{n-1}+\cdots+A_0\end{aligned}$$

となる．よって，$f(x)$ を $Ex-M$ で割った余りは $f(M)$ となり，

$$f(x) = g(x)\cdot(Ex-M)+f(M)$$

となる．特に $f(M)=O$ ならば，$f(x)$ は $Ex-M$ で割り切れる．

逆に，$f(x)$ が $Ex-M$ で割り切れて

$$f(x) = g(x)\cdot(Ex-M)$$

となったならば，M は $Ex-M$ の係数 E, M と可換であるから，x に M を代入してよく

$$f(M) = g(M)\cdot(EM-M) = O$$

となる．

ところで，$M \neq N$ に対して $f(x)$ が $Ex-M$ でも $Ex-N$ でも割り切れるとき，その積 $(Ex-M)(Ex-N)$ で割り切れるだろうか．

反例 $f(x)=Ex^2-2Ex+E$, $M=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $N=E$ とすると，

$$\begin{aligned}
f(M) &= M^2-2M+E\\
&= \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = O\\
f(N) &= E^2-2E+E = O\\
(Ex-M)(Ex-N) &= Ex^2-(M+N)x+MN\\
&= Ex^2-(M+E)x+M
\end{aligned}$$

となり，$f(x)$ は $Ex-M$, $Ex-N$ で割り切れるが，その積では割り切れない．(反例終)

この例の場合，M と N は可換である．それでもうまくいかないのである．

このように反例を作っていくと，ハミルトン-ケイリーの定理などは奇跡的に思えてくる．正確に書くと，次のようになる．

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

とすれば，

$$Ex - A = \begin{bmatrix} x & & O \\ & \ddots & \\ O & & x \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} x-a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & x-a_{nn} \end{bmatrix}$$

となる．よって，その行列式は普通の n 次多項式となる．それを $\Phi_A(x)$ とすれば，

$$\Phi_A(x) = |Ex - A| = \begin{vmatrix} x-a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

となる．このとき

$$\Phi_A(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_nE = O$$

というのが，ハミルトン-ケイリーの定理であった．

誤まった証明　$\Phi_A(x) = |Ex - A|$ であるから，x に A を代入すると左辺は $\Phi_A(A)$ となり，右辺は

$$\text{右辺} = |EA - A| = |O| = 0$$

となる．（証明終）

この証明は極端におかしい．意味を考えればはっきりする．

$$|Ex - A| = \begin{vmatrix} x-a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$

において $x = A$ を代入することが，そもそもナンセンスなのである．

§4　線型写像

ベクトル空間 V より V への線型写像 f において，$f^{k-1} \neq 0$，$f^k = 0$ だったとする．すると，$1 \leqq i \leqq k$ に対して

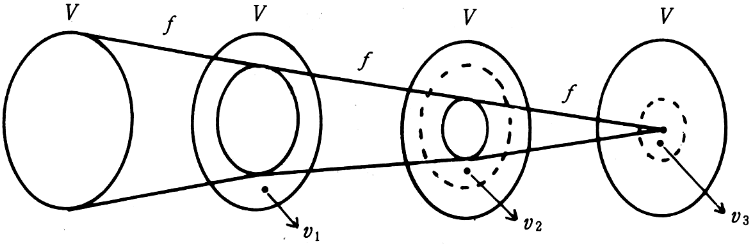
$$f^{i-1}(V) \supsetneqq f^i(V)$$

となる．なぜなら，もし等号が成立すれば，両辺に f を作用させて

$$f^{i-1}(V) = f^i(V) \implies f^i(V) = f^{i+1}(V)$$

となり，同様に続けていけば，$f^{k-1}(V) = f^k(V) = 0$ となってしまい，f^{k-1}

$\neq 0$ という仮定に反する．よって，$f^{i-1}(V)-f^{i}(V)$ より元 v_i を選びだすことができる．このとき，$v_1, v_2, \cdots, v_k$ は1次独立である．



証明 $a_1v_1+\cdots+a_kv_k=0$ とする．両辺に f^{k-1} を作用させると $f(V)\ni v_2, v_3, \cdots, v_k$ であるから2番目以下は消えてしまい $a_1f^{k-1}(v_1)=0$ となる．よって $a_1=0$ となる．帰納法を用いれば，$a_2=a_3=\cdots=a_k=0$ が得られる．（証明終）

ちょっと見ると正しそうな証明だけれど，この証明は正しくない．どこがいけないのだろうか．v_1 は確かに $V-f(V)\ni v_1$ だし，$f^{k-1}\neq 0$ であるから $f^{k-1}(v_1)\neq 0$ のような気がするが，ここがいけないのである．

反例 $V=\boldsymbol{R}^3$ とし，f の作用を

$$f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \quad v_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とすれば，f は線型写像で $f\neq 0$, $f^2=0$ となり，

$$V-f(V)\ni v_1, \qquad f(V)-f^2(V)=f(V)-\{0\}\ni v_2$$

となっている．ところが $f(v_1)=0$ である．

正しい証明 $a_1v_1+\cdots+a_kv_k=0$, $a_1\neq 0$ ならば，両辺を a_1 で割り

$$v_1=-\frac{a_2}{a_1}v_2-\cdots-\frac{a_k}{a_1}v_k\in f(V)$$

となってしまう．よって $a_1=0$ でなければならない．以下同様．（証明終）

f を作用させる，などというしゃれたことをしたので，失敗したわけである．

§5　準同型

群 G より n 次正方行列への写像 f で，

$$f(ab) = f(a)\cdot f(b)$$

が成立するものを考えよう．このとき $f(e)=E$ であろうか．$f(a)\neq O$ となる a が一つでもあれば，$f(a^{-1})$ の行き先は $f(a)^{-1}$ になるようなので，よいような気がする．

反例　$G=\boldsymbol{R}-\{0\}$ として

$$f(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad a\in\boldsymbol{R},\quad a\neq 0$$

とすれば，

$$f(ab) = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = f(a)f(b)$$

となっているが，

$$f(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．(反例終)

では，どのような条件があったら $f(e)=E$ となるのだろうか．$f(a)$:正則 となる a が一つでもあれば，

$$f(a) = f(ae) = f(a)f(e), \qquad f(a):\text{正則}$$

より $f(e)=E$ となる．このときは，どのような $b\in G$ に対しても

$$f(bb^{-1}) = f(b)f(b^{-1}) = f(e) = E$$

より $f(b)$:正則 となり，f は**群の表現**となる．

群論入門

演算とはなにか，を徹底的に考え直し，群論の入り口にたとう．抽象的な概念というものは，言葉を正確に理解することから，理解できるようになる．

§1 演　算

群とは，まず演算が定義されていなければならない．集合 M の演算とは，M の二つの元に対して M の一つの元を対応させる規則のことである．より正確には，演算とは $M\times M$ より M への写像 f のことである．$M\times M$ の元 (a, b) に対して M の元 $f(a, b)$ が定まることが演算で，通常は乗法的に，$f(a, b)=a\circ b$ または ab などと書いたりする．演算はいつも結合法則

$$(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$$

を満たすだろうか．反例はいくらでも作ることができる．たとえば，

反例　$M=\{0, 1, 2, \cdots\}$ とし，二つの元 a, b に対して

$$a\circ b = |a-b|$$

と定義すると，$|a-b|\in M$ であるから，確かに演算である．しかし，

$$(1\circ 2)\circ 3 = ||1-2|-3| = |1-3| = 2$$

$$1\circ(2\circ 3) = |1-|2-3|| = |1-1| = 0$$

となり，$(1\circ 2)\circ 3 \neq 1\circ(2\circ 3)$ となる．(反例終)

M が有限集合で，元の個数が n とする．このとき，積集合 $M\times M$ の元の個数は n^2 となり，$M\times M$ より M への写像は，$M\times M$ の各元に対して n 通りある行き先を指定すれば定まる．よって，$M\times M$ より M への写像の個数は n^{n^2} 個となる．つまり，演算は n^{n^2} 個あるわけである．たとえば $n=2$ のとき，演算は $2^{2^2}=2^4=16$ 通りあり，このうち結合法則を満たすものは次の8通りしかない．

$M=\{a, b\}$ とし，結合表として

	a	b
a	aa	ab
b	ba	bb

となる表を書くことにする．

①

	a	b
a	a	a
b	a	a

②

	a	b
a	b	b
b	b	b

③

	a	b
a	a	a
b	b	b

④

	a	b
a	a	b
b	a	b

⑤

	a	b
a	a	a
b	a	b

⑥

	a	b
a	a	b
b	b	b

⑦

	a	b
a	a	b
b	b	a

⑧

	a	b
a	b	a
b	a	b

この８通りの演算が結合法則を満たし，残りの８通りが満たさないことは，少し計算してみればわかる．$n=3$ のときは，演算は $3^9=19683$ 個あるから，その中で結合法則を満たすものを選ぶのは大変である．マイコンを使ってしらみ潰しに調べてみると，113 個のみが結合法則を満たすことがわかった(§3 参照)．結合法則を満たす演算は，非常に少ないのである．

一般に，M の元 x で，

$$M \text{ のどの元 } y \text{ に対しても } \quad yx=y$$

となる x を**右単位元**という．③の場合，a, b 共に右単位元である．

$$M \text{ のどの元 } y \text{ に対しても } \quad xy=y$$

となる x を**左単位元**という．④の場合，a, b 共に左単位元である．③の場合，a, b 共に右単位元であるが，左単位元ではない．⑥や⑦の場合，a は右単位

元であり，左単位元でもある．このようなとき単に，**単位元**という．⑤と⑧の場合，b が単位元である．

$$xy = xz \quad ならば \quad y = z$$

のとき，**左消去律**が成り立つという．④では左消去律が成立する．同様に，

$$yx = zx \quad ならば \quad y = z$$

のとき，**右消去律**が成り立つという．③では右消去律が成立する．⑦と⑧では，両方の消去律が成立する．このとき，**消去律**が成り立つという．

右単位元 x を固定しておく．y に対して

$$yz = x$$

となる z を，y の（x に関する）**右逆元**という．③の場合，$x=a$ とすると，a, b どちらも a の右逆元であるが，b には右逆元が存在しない．⑥の場合，a は単位元なので，$x=a$ とすると，a には右逆元 a があるが，b には右逆元はない．

このように，たった二つの元よりなる集合の演算においても，いろいろな意味の反例を作ることができる．

§2　群の公理

群 G とは，G において演算が定義されていて，

（1）　結合法則を満たす

G には e という特別な元が存在し，次の二つの性質をもっている．

（2）　e は右単位元である

（3）　G のどの元も（e に関する）右逆元をもつ

という公理を満足するものである．

前節の③の場合を考えよう．右単位元が二つも存在する．しかも，$e=a$ と思ったとき，a には右逆元が二つもあり，b には右逆元は一つもない．また，$e=b$ と思ったときは，a には右逆元がなく，b には二つ右逆元がある．このようにおかしな演算もあるので，注意が必要である．しかし，群の公理の３番目は強力な公理なので，おかしなことが決して起こらないことが，次

のように証明される．

x の右逆元（の一つ）を y とし，y の右逆元（の一つ）を z とすれば，

$$xy = e, \qquad yz = e$$

となる．結合法則を用いれば

$$\begin{aligned} yxyz &= y(xy)z = yez = (ye)z = yz = e \\ &= yx(yz) = yxe = y(xe) = yx \end{aligned}$$

つまり，$yx=e$ が得られた．さらに，

$$ex = (xy)x = x(yx) = xe = x$$

となり，$ex=x$ が得られた．つまり，右単位元 e は左単位元でもあり，x の右逆元は左逆元でもあるわけである．

他に右単位元 e_1 があったとすると，どのような x に対しても $xe_1=x$ であるから，$x=e$ とおくと

$$ee_1 = e$$

となる．e はどのような x に対しても $ex=xe=x$ だったから，$x=e_1$ とおくと

$$ee_1 = e_1e = e_1$$

となる．よって $e_1=e$ となり，e 以外に右単位元は存在しない．同様に，左単位元も e 以外に存在しない．

x の右逆元が二つあったとして，それらを y_1, y_2 としよう．すると，

$$xy_1 = y_1x = e, \qquad xy_2 = y_2x = e$$

となり，

$$y_2 = y_2e = y_2(xy_1) = (y_2x)y_1 = ey_1 = y_1$$

より $y_2=y_1$ となる．つまり，右逆元は一つしかないことがわかった．同様に，x の左逆元は一つしかなく，右逆元と左逆元は等しい．一つしかないことがわかったから，x の逆元を x^{-1} と書いてよいわけである．

§3　マイコン用プログラム

物事は徹底的に調べなければ本質はわからない．しかし，あまりにも調べ

る場合が多いときは，手に負えない．こんなときマイコンを使うとよいと思う．参考のために，3 個の元の演算の中で結合法則を満たすのは何通りあるか数えるプログラムを書こう．BASIC による次のプログラムを実行してみた．計算時間は 753 秒であった．同じプログラムを，今後流行するであろう“言語 C”に書きかえて実行すると，計算時間は 11 秒であった．約 70 倍のスピードである．

```
100 DIM T%(3,3) : S% = 0 : PRINT TIME$
110 FOR A% = 1 TO 3 : T%(1,1) = A%
120 FOR B% = 1 TO 3 : T%(1,2) = B%
130 FOR C% = 1 TO 3 : T%(1,3) = C%
140 FOR D% = 1 TO 3 : T%(2,1) = D%
150 FOR E% = 1 TO 3 : T%(2,2) = E%
160 FOR F% = 1 TO 3 : T%(2,3) = F%
170 FOR G% = 1 TO 3 : T%(3,1) = G%
180 FOR H% = 1 TO 3 : T%(3,2) = H%
190 FOR I% = 1 TO 3 : T%(3,3) = I%
200 FOR X% = 1 TO 3
210 FOR Y% = 1 TO 3 : P% = T%(X%,Y%)
220 FOR Z% = 1 TO 3 : Q% = T%(Y%,Z%)
230 IF T%(P%,Z%) <> T%(X%,Q%) THEN 260
240 NEXT Z%,Y%,X%
250 S% = S% + 1 : PRINT(S%)
260 NEXT I%,H%,G%,F%,E%,D%,C%,B%,A%
270 PRINT S%;TIME$
280 END
```

BASIC のプログラム

```
main(){int t[3][3],s=0,a,b,c,d,e,f,g,h,i,x,y,z,p,q;
      for(a=0;a<3;++a){t[0][0]=a;
       for(b=0;b<3;++b){t[0][1]=b;
        for(c=0;c<3;++c){t[0][2]=c;
         for(d=0;d<3;++d){t[1][0]=d;
          for(e=0;e<3;++e){t[1][1]=e;
           for(f=0;f<3;++f){t[1][2]=f;
            for(g=0;g<3;++g){t[2][0]=g;
             for(h=0;h<3;++h){t[2][1]=h;
              for(i=0;i<3;++i){t[2][2]=i;
               for(x=0;x<3;++x){
                for(y=0;y<3;++y){p=t[x][y];
                 for(z=0;z<3;++z){q=t[y][z];
                  if(t[p][z] != t[x][q]) goto NEXT;
               }}} s+=1; printf("%d¥n",s);
NEXT: }}}}}}}}} printf("end¥n");}
```

言語 C のプログラム

代数方程式の解法

2次，3次，4次方程式は解けるのに，5次以上の方程式は解けない，というアーベル（N. H. Abel, 1802—1829）の結果は大いなる反例と言わねばならない．このアーベルの結果は，現代代数学の出発点であるから，基本的な考え方をゆっくり述べよう．

§1　2次方程式

n 次方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0, \qquad a_0\neq 0$$

は，両辺を a_0 で割り

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_n}{a_0}=0$$

と表わせるから，最高次の係数は1と思って一般性を失なわない．よって，

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

という方程式を扱えばよい．$x=y-a_1/n$ と変数変換を行なえば，

$$\left(y-\frac{a_1}{n}\right)^n+a_1\left(y-\frac{a_1}{n}\right)^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

$$\left(y^n-n\cdot\frac{a_1}{n}\cdot y^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{{a_1}^2}{n^2}\cdot y^{n-2}-\cdots\right)$$
$$+a_1\left(y^{n-1}-(n-1)\cdot\frac{a_1}{n}\cdot y^{n-2}+\cdots\right)$$
$$+a_2(y^{n-2}-\cdots)$$
$$+\cdots\cdots\cdots+a_n=0$$

$$\therefore\quad y^n+\left(a_2-\frac{n-1}{2n}{a_1}^2\right)y^{n-2}+\cdots\cdots\cdots=0$$

となり，y^{n-1} の係数は消えてしまう．よって，一般に

$$x^n + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

という方程式を扱えばよい．

さて，$n=2$ のときは

$$x^2 + a = 0$$

を解けばよい．解は $x_1=\sqrt{-a}$, $x_2=-\sqrt{-a}$ となる．2 次方程式の場合はこれで終りである．

$$\sqrt{-a} = \frac{x_1 - x_2}{2} \text{ : } x_1 \text{ と } x_2 \text{ の交代式}$$

であることに注意しよう．

§2 3 次方程式

高校時代に，

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\ &= (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z) \end{aligned}$$

と因数分解することは，習ったであろう．ここで ω は 1 の 3 乗根，すなわち $\omega=(1+\sqrt{-3})/2$ である．3 次方程式

$$x^3 + ax + b = 0$$

と比べれば，もし

（1） $$a = -3yz$$

（2） $$b = y^3 + z^3$$

となる y, z が見つかれば，

（3） $$x_1 = -y-z$$

（4） $$x_2 = -\omega y - \omega^2 z$$

（5） $$x_3 = -\omega^2 y - \omega z$$

が三つの根になることがわかる．（1）を満たす y, z は

（6） $$a^3 = -27y^3z^3$$

を満たすから，$Y=y^3$, $Z=z^3$ とおけば，（6）と（2）より

（7） $$Y \cdot Z = -a^3/27$$

(8) $$Y+Z=b$$

となる．よって，Y と Z は2次方程式

(9) $$X^2-bX-a^3/27=0$$

を満たす．逆に，(9)を満たす Y と Z は(7)と(8)を満たす．

(10) $$y=\sqrt[3]{Y}, \qquad z=-a/(3y)$$

とおけば $a=-3yz$ となるから(1)を満たす．$Y=y^3$ および(7)を使えば，

$$z^3=-\frac{a^3}{27}\frac{1}{y^3}=-\frac{a^3}{27}\frac{1}{Y}=Z$$

であるから，(8)より

$$y^3+z^3=Y+Z=b$$

が得られる．つまり(2)も成り立つ．つまり3次方程式が解かれてしまった．

まとめると，(9)の一つの根を Y とし，(10)により y と z を定めると，(3), (4), (5)により三つの根が定まるわけである．

$$Y=\frac{b+\sqrt{b^2+4a^3/27}}{2}$$

としよう．三つの根が x_1, x_2, x_3 だから，

$$\begin{aligned} x^3+ax+b &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

となり，係数を比べれば

$$\begin{aligned} 0 &= x_1+x_2+x_3 \\ a &= x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 \\ b &= -x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

となる．x_1, x_2, x_3 の差積 $(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$ を Δ と表わそう．Δ^2 を計算するのに $x_1=-x_2-x_3$ を使うと，

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (x_2-x_1)^2(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)^2 \\ &= (2x_2+x_3)^2(x_2+2x_3)^2(x_3-x_2)^2 \\ &= (4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2)(x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2)(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2) \\ &= 4x_2^6+12x_2^5x_3-3x_2^4x_3^2-26x_2^3x_3^3-3x_2^2x_3^4+12x_2x_3^5+4x_3^6 \end{aligned}$$

となる．また，Y を表わす平方根の中を計算してみると

$$b^2+\frac{4a^3}{27}=\frac{1}{27}\{27x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2+4(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^3\}$$

ここで $x_1=-x_2-x_3$ を使うと，結果は

$$(11)\qquad b^2+\frac{4a^3}{27}=\frac{-1}{27}\{4x_2{}^6+12x_2{}^5x_3-3x_2{}^4x_3{}^2-26x_2{}^3x_3{}^3-3x_2{}^2x_3{}^4+12x_2x_3{}^5+4x_3{}^6\}$$

$$=\frac{-\varDelta^2}{27}$$

となる．よって

$$(12)\qquad \sqrt{b^2+\frac{4a^3}{27}}=\pm\frac{\sqrt{-3}}{9}\varDelta：x_1, x_2, x_3 \text{ の交代式}$$

となる．つまり，3 次方程式を解くには，まず Y を求めるために平方根を開くが，その値は x_1, x_2, x_3 の交代式となる．次に，x_1, x_2, x_3 を求めるためには Y の立方根を求めるわけだが，その値 y は，(3), (4), (5) および ω の満たす式 $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$ を用いると，

$$x_1+\omega^2x_2+\omega x_3=-3y-(1+\omega+\omega^2)z$$
$$=-3y$$

となるから，

$$(13)\qquad y=-(x_1+\omega^2x_2+\omega x_3)/3$$

となり，やはり x_1, x_2, x_3 の多項式である．

歴史的にみれば，3 次方程式の解法の糸口を見つけたのはイタリアのフェロ (S. del Ferro, 1465—1526) であるが，解法を完成させたのはタルタリア (N. Tartaglia, 1500?—1557) で 1535 年 2 月 12 日のことらしい．どちらも解法を公表しなかったが，絶対に公表しないという約束でタルタリアから解法を教わったカルダノ (G. Cardano, 1501—1576) という狂天才は，1539年に解法を公表した．カルダノは悪徳の塊のような面があったが，長男が妻に毒をもったかどで斬首刑になってからは，失意のうちに日々を送ったらしい．カルダノがタルタリアへの誓約を破り，3 次方程式の解法を公表したのは背信

行為とも思えるが，数学全体からみれば，非常によいことを実行したと言えよう．

ところで，3 次方程式の 3 根 x_1, x_2, x_3 が相異なる実根のとき，根を求めるために，まず Y を計算しなければならない．そのとき，平方根の内部は，(11) より

$$b^2+\frac{4a^3}{27}=-\frac{1}{27}(x_2-x_1)^2(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)^2<0$$

となってしまう．つまり，実根を求めるためにはどうしても虚数を使わなければならないのである．実係数の方程式の実根を求めるのに，どうして虚数が必要なのだろうか．これも偉大なる反例と言わねばならない．この時代，虚数などという数は認められていなかった．しかし，実際に存在する実根を表わすのに虚数がどうしても必要だったために，カルダノは歴史上はじめて虚数を認めた．狂人的な性格だったからこそ，未知なる世界を認めたのであろう．

2 次方程式 $x^2+a=0$ の場合は，$a>0$ のとき根は存在しない，と片づけることができる．よって，2 次方程式の解法からは虚数は生まれてこなかった．3 次方程式の場合は，実際に存在する実根を表わすのに虚数を使わざるを得なかったからこそ，虚数を認めざるを得ないのである．

§3　4 次方程式

高校では習わない因数分解の公式として，次のようなものがある．

(1)　$x^4+y^4+z^4+u^4-2(x^2y^2+x^2z^2+x^2u^2+y^2z^2+y^2u^2+z^2u^2)+8xyzu$
$=(x+y+z+u)(x+y-z-u)(x-y+z-u)(x-y-z+u)$

右辺を展開してみれば，この公式を証明することができる．

さて，4 次方程式

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$

を解くには，(1) と比べて

(2)　$$a=-2(y^2+z^2+u^2)$$

(3)　$$b = 8yzu$$

(4)　$$c = y^4+z^4+u^4-2(y^2z^2+y^2u^2+z^2u^2)$$

となる y, z, u が見つかれば，

(5)　$$x_1 = -y-z-u$$

(6)　$$x_2 = -y+z+u$$

(7)　$$x_3 = \quad y-z+u$$

(8)　$$x_4 = \quad y+z-u$$

となる．$Y=y^2, Z=z^2, U=u^2$ とおけば，(2), (3) より

(9)　$$Y+Z+U = -a/2$$

(10)　$$YZU = (b/8)^2$$

また (4) より

$$\begin{aligned} YZ+YU+ZU &= (Y^2+Z^2+U^2-c)/2 \\ &= \{(Y+Z+U)^2-2(YZ+YU+ZU)-c\}/2 \\ &= \{(-a/2)^2-c\}/2-(YZ+YU+ZU) \end{aligned}$$

だから

(11)　$$YZ+YU+ZU = \{(-a/2)^2-c\}/4$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} d &= a/2 \\ e &= (a^2-4c)/16 \\ f &= -b^2/64 \end{aligned}$$

とおけば，Y, Z, U は

$$X^3+dX^2+eX+f = 0$$

の 3 根である．$X=W-d/3$ とおけば，

$$\begin{aligned} 0 &= (W-d/3)^3+d(W-d/3)^2+e(W-d/3)+f \\ &= \{W^3-3(d/3)W^2+3(d^2/9)W-d^3/27\} \\ &\quad +d\{W^2-2(d/3)W+d^2/9\}+eW-e(d/3)+f \\ &= W^3+(-d^2/3+e)W+(2d^3/27-ed/3+f) \end{aligned}$$

となるので，

$$A = -d^2/3 + e$$

$$B = 2d^3/27 - ed/3 + f$$

とおけば，W は

$$W^3 + AW + B = 0$$

の根となる．この 3 次方程式は前節で扱った方法で解ける．つまり，

$$S = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4A^3/27}}{2}$$

$$s = \sqrt[3]{S}, \qquad t = -A/(3s)$$

とおけば，

$$W_1 = -s - t$$

$$W_2 = -\omega s - \omega^2 t$$

$$W_3 = -\omega^2 s - \omega t$$

が W の値である．この値より $d/3$ を引けば，Y, Z, U が得られる．

$$y = \sqrt{Y}, \qquad z = \sqrt{Z}, \qquad u = b/(8yz)$$

とおけば（3）は満たされる．(10) より $u^2 = U$ となり，（9）と（11）より（2）と（4）が得られる．よって（5),（6),（7),（8）より，4 次方程式の根がすべて得られるわけである．

S を求めるために，平方根を用いた．その値は，前節の（12）より

$$\begin{aligned}\sqrt{B^2 + 4A^3/27} &= \pm\frac{\sqrt{-3}}{9}(W_2 - W_1)(W_3 - W_1)(W_3 - W_2)\\ &= \pm\frac{\sqrt{-3}}{9}(Z - Y)(U - Y)(U - Z)\\ &= \pm\frac{\sqrt{-3}}{9}(z^2 - y^2)(u^2 - y^2)(u^2 - z^2)\\ &= \pm\frac{\sqrt{-3}}{9}(z - y)(z + y)(u - y)(u + y)(u - z)(u + z)\end{aligned}$$

（5),（6),（7),（8）より

(12)　$$y = (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)/4$$

(13)　$$z = (-x_1 + x_2 - x_3 + x_4)/4$$

$$(14) \qquad u = (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)/4$$

となるので，この値を代入すると

$$\sqrt{B^2 + 4A^3/27} = \pm\frac{\sqrt{-3}}{9\times4^3}(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2) \times(x_4-x_2)(x_4-x_3)$$

$$= \pm\frac{\sqrt{-3}}{9\times4^3}\times \text{差積}$$

となり，x_1, x_2, x_3, x_4 の交代式となる．次に開く巾根（べきこん）は $s = \sqrt[3]{S}$ であるが，前節の (13) より

$$\begin{aligned} s &= -(W_1 + \omega^2 W_2 + \omega W_3)/3 \\ &= -\{(Y + d/3) + \omega^2(Z + d/3) + \omega(U + d/3)\}/3 \\ &= -(Y + \omega^2 Z + \omega U)/3 \\ &= -(y^2 + \omega^2 z^2 + \omega u^2)/3 \end{aligned}$$

となり，(12), (13), (14) を使えば

$$s = -(x_1x_2 + \omega^2 x_1x_3 + \omega x_1x_4 + \omega x_2x_3 + \omega^2 x_2x_3 + x_3x_4)/12$$

となり，s は x_1, x_2, x_3, x_4 の多項式となる．最後に平方根を開き $y = \sqrt{Y}$，$z = \sqrt{Z}$ を計算したが，これはもちろん (12), (13) より x_1, x_2, x_3, x_4 の多項式である．

4 次方程式の解法を見つけたのは，フェラリ（L. Ferrari, 1522—1560？）が 23 歳のときのようである．死亡した年がはっきりしないのは，姉に毒殺されたかららしい．

§4　5 次以上の方程式の場合

4 次方程式の次は 5 次方程式だが，この解法はなかなか得られない．根があるか否かさえもわからなかったが，ガウス（C. F. Gauss, 1777—1855）が 1799 年に“n 次方程式は n 個の複素根をもつ”ことを証明した．これを**代数学の基本定理**という．根があるならば，それを具体的に計算する方法があるはずだ，と思うのは自然である．ところが，アーベルは 23 歳のとき（1826）に，

定理　5次以上の方程式は，一般には巾根によって解くことは不可能である．

を証明した．フェラリが4次方程式の解法を見つけてから280年後である．なにか解法はあるにちがいない，と思われていたことに対する偉大なる反例である．どのような証明であるかを，できるだけていねいに説明しよう．



アーベル

一般に，n 次方程式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

が与えられたとき，n 個の根を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とすれば

$$\begin{aligned} x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n &= (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \\ &= x^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x^{n-1} \\ &\quad + (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n \cdot x_1x_2\cdots x_n \end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} -a_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\ &\vdots \\ (-1)^n a_n &= x_1x_2\cdots x_n \end{aligned}$$

となる．つまり，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の基本対称式が係数である．一般的な方程式とは，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の間になにも関係がないことである．よって，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を**独立変数**と思ってよい．

次に，**巾根によって解く**という意味をはっきりさせよう．まず巾根を1回も用いない解法とは，四則算法だけを用いる解法である．つまり，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ と有理数と1の巾根との四則算法を行なってできるすべての数の集まり $K_0 = \boldsymbol{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_n, 1\text{の巾根})$ の中に，根が含まれることを意味する．もし四則算法だけで解が得られるとしたら，$K_0 \ni x_1$ となり，よって

$$x_1 = f(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ の有理式}$$

となるはずである．$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の対称式だから $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の対称式となる．ところが，左辺の x_1 は $n \geqq 2$ ならば対称式でない．よって，次の定理が得られた．

定理 1　$n \geqq 2$ ならば，n 次方程式は四則算法だけでは解けない．

確かに，2 次, 3 次, 4 次方程式は平方根や立方根を必要とした．では，巾根によって解く解法とは，集合論的にどのように表わされるだろうか．四則算法のみによって得られる数が K_0 の元であるから，巾根を 1 回用いるとは，K_0 の元 r を選び，r の m 乗根 $\alpha = \sqrt[m]{r}$ を作り，あとは四則算法だけを用いる解法である．つまり，根が $K_1 = K_0(\sqrt[m]{r})$ に含まれる場合である．巾根を 2 回用いる解法とは，K_1 より元 β を選び，その l 乗根を作り，あとは四則算法だけを用いて得られる数の全体 $K_2 = K_1(\sqrt[l]{\beta})$ の中に根が含まれることを意味する．巾根による解法とは，このような操作を有限回くり返し，根が含まれる集合にたどりつくことである．(m, l は素数に制限してよい．)

ところで，もしこのようにして根にたどりつくならば，その巾根は根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の有理式であることが証明できる．たとえば 3 次方程式において，始めの平方根は x_1, x_2, x_3 の交代式であり，2 番目の 3 乗根は x_1, x_2, x_3 の 1 次式であった．4 次方程式のときも同様であった．一般的にいえるこの事実の証明は省略して，ここではこの事実が証明できた，と仮定してその後どのようにして，アーベルの結果が得られるかを示そう．

$$K_0 = \boldsymbol{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_n, 1 \text{ の巾根}) \ni r$$

$$K_1 = K_0(\sqrt[m]{r}), \qquad \alpha = \sqrt[m]{r}$$

としよう．α は仮定により $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の有理式だから，

$$\alpha = \sqrt[m]{r} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \ x_i \text{ の有理式}$$

としよう．この $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は K_0 に含まれないから，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の対称式ではない．この点がはっきりしない人のために少し説明を加えると，次のようになる．

一般に，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式で対称式となるものは，基本対称式の多項

式になる．(このことはよく知られている．) よって $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の多項式になる．$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の有理式で対称式の場合でも，同じようなことがいえる．

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)/h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

と，f を互いに素な多項式 g と h の商で表わそう．互換 $(1, 2)$ を作用させたとき，g, h が g_1, h_1 になったとしよう．f は対称式だから，

$$f(x_2, x_1, \cdots, x_n) = g_1/h_1$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g/h$$

より

$$g/h = g_1/h_1$$

が得られる．g と h は互いに素だから，g_1 は g で割り切れ，h_1 は h で割り切れる．$g_1 = g \cdot u$, $h_1 = h \cdot u$ とおく．互換を作用させても $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式としての次数は変わらないから，u は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を含まない定数である．互換 $(1, 2)$ をもう一度作用させると g_1 は g にもどるので，$g = g_1 \cdot u = g \cdot u^2$ となる．よって，u は 1 または -1 となる．

もし $u = -1$ ならば $g_1 = -g$ となり，

$$g(x_2, x_1, \cdots, x_n) = g_1 = -g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

となる．$x_1 = x_2$ とすると，

$$g(x_2, x_2, \cdots, x_n) = -g(x_2, x_2, \cdots, x_n)$$

となり，

$$g(x_2, x_2, x_3, \cdots, x_n) = 0$$

が得られた．よって剰余定理より，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が $x_1 - x_2$ で割り切れることになる．$h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ も $x_1 - x_2$ で割り切れることが同様にいえるので，g と h は互いに素でなくなる．つまり，$u = 1$ でなければならない．

どのような置換も互換の積として表わされるので，g と h は対称式であることがわかった．よって g と h は $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の多項式となり，f は $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の有理式となり K_0 に含まれてしまう．対偶をいえば，K_0 に含まれない有理式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は対称式ではない．

よって，ある互換によって変化する．たとえば，互換 (1, 2) を作用させると $f(x_2, x_1, \cdots, x_n) \neq f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ となる．しかし，r は K_0 の元なので $f^m(x_1, \cdots, x_n)$ は対称式である．よって，互換 (1, 2) を作用させても変わらないので

$$f^m(x_2, x_1, \cdots, x_n) = f^m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\{f(x_2, x_1, \cdots, x_n)/f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}^m = 1$$

$$\therefore \quad f(x_2, x_1, \cdots, x_n) = \zeta\cdot f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad \zeta^m = 1, \quad \zeta \neq 1$$

となる．つまり，互換では 1 の m 乗根だけ変わってくる．この式に互換 (1, 2) をふたたび作用させると，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \zeta\cdot f(x_2, x_1, \cdots, x_n) \\ &= \zeta^2\cdot f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

つまり，$\zeta^2 = 1$, $\zeta = -1$ でなければいけない．よって $m = 2$ となり，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は互換 (1, 2) により符号だけを変える式でなければならない．

f を f_1/f_2, f_1 と f_2 は互いに素な多項式，と表わしたとき，もし分母において $x_1 = x_2$ としたとき 0 になれば，すなわち $f_2(x_2, x_2, \cdots, x_n) = 0$ ならば，$f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は剰余定理により $x_1 - x_2$ で割り切れる．そうでない場合を考えよう．

$$f(x_2, x_1, \cdots, x_n) = -f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

において，$x_1 = x_2$ とおくと

$$f(x_2, x_2, \cdots, x_n) = -f(x_2, x_2, \cdots, x_n)$$

となり，$f(x_2, x_2, \cdots, x_n) = 0$ が得られるので，剰余定理より $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の分子は $x_1 - x_2$ で割り切れて

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 - x_2)\cdot g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

となる．$m = 2$ であるから，両辺を 2 乗すると対称式となる．

$$f^2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 - x_2)^2\cdot g^2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

であることと，対称式であることより，$f^2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が $(x_i - x_j)^2$, $1 \leqq i < j \leqq n$, で割り切れる．よって多変数多項式の素因子分解の一意性により，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が $(x_i - x_j)$ で割り切れる．つまり，差積 Δ で割り切れて

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varDelta \cdot h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

となる．両辺を2乗すると，$h^2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が対称式であることがわかるので，同じ論法で，$h(x_1, \cdots, x_n)$ は対称式か $\varDelta \cdot h_1(x_1, \cdots, x_n)$ という形になることがわかる．同様に続けていくと，$h(x_1, \cdots, x_n) = \varDelta^i \cdot H(x_1, \cdots, x_n)$，ただし $H(x_1, \cdots, x_n)$ は対称式，となる．このとき

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \varDelta \cdot \varDelta^i \cdot H(x_1, \cdots, x_n)$$

となり，$f(x_1, \cdots, x_n)$ は対称式でなく $H(x_1, \cdots, x_n)$ は対称式なので，i：偶数 でなければならず，よって $h(x_1, \cdots, x_n)$ は対称式であることがわかった．f の分母が $x_1 - x_2$ で割れるときも，i が負の偶数になるだけで，同様な結果に達する．まとめると，

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \varDelta \cdot h(x_1, \cdots, x_n), \qquad h：対称式$$

となる．つまり，$f(x_1, \cdots, x_n)$ は交代式になり

$$K_1 = K_0(\sqrt{r}) = K_0(\varDelta)$$

となる．$n = 2, 3, 4$ のときは確かにそうであった．

もし平方根を1回だけ用いて根が得られたとしたら，

$$x_1 \in K_0(\varDelta), \qquad \varDelta^2 \in K_0$$

であるから，

$$\frac{c + d\varDelta}{a + b\varDelta} = \frac{(c + d\varDelta)(a - b\varDelta)}{(a + b\varDelta)(a - b\varDelta)}$$

$$= \frac{ac - bd\varDelta^2}{a^2 - b^2\varDelta^2} + \frac{ad - bc}{a^2 - b^2\varDelta^2}\varDelta$$

を使えば，

$$x_1 = P_1 + \varDelta \cdot P_2, \qquad P_1 \in K_0,\ P_2 \in K_0$$

となる．差積はどの互換を作用させても $-\varDelta$ となるので，$n \geqq 3$ ならば互換 $(1, 2)$, $(1, 3)$ を作用させることにより

$$x_2 = P_1 - \varDelta \cdot P_2, \qquad x_3 = P_1 - \varDelta \cdot P_2$$

となり，$x_2 = x_3$ となってしまう．一般にはこのようなことは起こらないので，次の定理が得られた．

定理 2　$n \geqq 3$ ならば，一般的な n 次方程式の解法は，平方根を1回用い

るだけではだめである．

さて，$n \geqq 3$ のとき，K_1 の中には根はなかった．よって，$K_1 \ni \beta$, $K_2 = K_1(\sqrt[l]{\beta})$ と，もう一度巾根を用いてみよう．仮定より

$$\sqrt[l]{\beta} = f(x_1, \cdots, x_n) : x_1, \cdots, x_n \text{ の有理式}$$

であるが，$f^l(x_1, \cdots, x_n)$ は K_1 の元である．K_1 の元はすべての偶置換で変わらないし，逆に偶置換で変わらない有理式は

$$P_1 + \Delta \cdot P_2, \qquad P_1 \text{ と } P_2 \text{ は対称式}$$

と表わされるので，K_1 の元となる．この点をもう少し詳しく説明すると，次のようになる．

$F(x_1, \cdots, x_n)$ を偶置換で変わらない有理式としよう．すべての互換で変わらなければ，$F(x_1, \cdots, x_n)$ は対称式となる．そうでなければ，ある互換，たとえば $(1, 2)$ で変化する．変化したものを $G(x_1, \cdots, x_n)$ とおく．

$$F(x_2, x_1, \cdots, x_n) = G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

の両辺にどのような互換を作用させても，それは2回互換を $F(x_1, \cdots, x_n)$ に作用させたものだから，$F(x_1, \cdots, x_n)$ となる．$F(x_1, \cdots, x_n)$ に $(1, 2)$ 以外の互換を作用させたとき $H(x_1, \cdots, x_n)$ になったとする．すると，H と G に同じ互換を作用させるともとの F となる．よって，$H=G$ でなければならない．つまり，F はどのような互換に対しても G となり，G はどのような互換に対しても F となる．よって，$F+G$ は対称式となり，$F-G$ は互換を作用させると符号が変わるので，$(F-G)/\Delta$：対称式 となる．

$$F + G = P_1, \qquad F - G = \Delta \cdot P_2$$

とおけば，

$$F = (P_1 + \Delta \cdot P_2)/2$$

となり，K_1 の元であることがわかった．

$f(x_1, \cdots, x_n)$ は K_1 の元でないので，ある偶置換で変化する．

$$(a, b) = (1, a)(1, b)(1, a)$$

であるから，互換は $(1, 2), (1, 3), \cdots, (1, n)$ より生成される．また，偶置換は，

$$(1,2)(1,b) = (1,2,b)$$
$$(1,a)(1,2) = (1,a,2)$$
$$(1,a)(1,b) = (1,a,2)(1,2,b)$$
$$(1,a,2) = (1,2,a)(1,2,a)$$

であるから，(1, 2, 3), (1, 2, 4), …, (1, 2, n) により生成される．よって，たとえば $f(x_1, \cdots, x_n)$ は置換 (1, 2, 3) で変化する．しかし $f^l(x_1, \cdots, x_n)$ は K_1 に含まれるので変化しない．つまり，

$$f^l(x_2, x_3, x_1, \cdots, x_n) = f^l(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\therefore \quad f(x_2, x_3, x_1, \cdots, x_n) = \zeta \cdot f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad \zeta^l = 1, \quad \zeta \neq 1$$

となる．両辺に置換 (1, 2, 3) をさらに 2 回作用させると，

$$\begin{aligned} f(x_3, x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \zeta \cdot f(x_2, x_3, x_1, \cdots, x_n) \\ &= \zeta^2 \cdot f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \\ f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) &= \zeta^2 \cdot f(x_2, x_3, x_1, \cdots, x_n) \\ &= \zeta^3 \cdot f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

となる．よって $\zeta^3=1$ となり，$l=3$ であることがわかった．3 次方程式，4 次方程式の解法において，確かに 2 番目には立方根を用いている．

ところで，$n \geqq 5$ のとき

$$(1, 2, 3, 4, 5) = (1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)$$

は偶置換である．よって，$f^3(x_1, \cdots, x_n)$ に作用させても変わらない．よって，同じ議論で

$$f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, \cdots, x_n) = \zeta \cdot f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots, x_n), \qquad \zeta^3 = 1$$

となる．置換 (1, 2, 3, 4, 5) をさらに 4 回作用させると，

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots, x_n) = \zeta^5 \cdot f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots, x_n)$$

となるので，$\zeta^5=1$ となる．

$$\zeta = \zeta^{5\times2-3\times3} = (\zeta^5)^2/(\zeta^3)^3 = 1$$

であるから，置換 (1, 2, 3, 4, 5) を作用させても $f(x_1, \cdots, x_n)$ は変わらない．同様に，(1, 3, 2, 4, 5), (3, 2, 1, 5, 4) を作用させても変わらない．よって，その積を作用させても変わらない．ところが，

$$(1, 3, 2, 4, 5)(3, 2, 1, 5, 4) = (1, 2, 3)$$

であるから，f は（1, 2, 3）で変化しなくなり，矛盾である．よって，5 次以上の方程式は一般には巾根だけでは解けない．



ガロア

以上でアーベルの結果は証明できた．ただ，つけ加える巾根が根の有理式だ，という仮定は証明しなかった．この点は，高木貞治著『代数学講義』を参照してほしい．また，出発点となる K_0 を $K_0 = \boldsymbol{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_n$, 1 の巾根）としたことに対して不満をもっている人も多いであろう．$K_0 = \boldsymbol{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ にしても，実はすべての証明はうまくいく．さらに，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が独立変数でなくても，たとえば

$$x^5 - 4x + 2 = 0$$

が巾根だけで解けないことも，証明できる．

詳しいことは，ガロア理論を学べばわかる．ガロア（E. Galois, 1811－1832）は，アーベルの結果を精密化し，どのような方程式が解けて，どのような方程式が解けないかを分類する理論を，わずか 10 代のときに作りだした．そして 21 歳で決闘のため夭折した．

解析学における反例

一 松 　信

§1　解析学での反例の意義

反例とは，数学（その他の理論科学）において，ある命題が正しくないことを反証するためにあげる例である．ある命題が正しいことを証明するのは大変であるが，正しくないことを証明するには，そうでない例を一つあげれば（少なくとも理論上では）十分である．たとえば，あわて者がよくやる“不公平分配法則”

$$a(b+c)=ab+c$$

が正しくないことは，$a=2,\ b=1,\ c=3$ を代入してみれば，左辺$=8$，右辺$=5$ となって合わないことから，ただちにわかる．また，

$$\text{無理数}+\text{無理数}=\text{無理数}$$

が正しくないことも $\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})=2$ という反例からわかる．

しかし解析学においては，その発展の歴史から，“反例”という語に多少他の分野と別のニュアンスがあるようである．その第一は，解析学が本質的に極限操作に基づく学問であり，その操作やそれと関連した実数の連続性をめぐって，歴史上しばしば素朴な直観とくい違う現象が生じた点である．

考察の対象を，たとえば解析関数といった“自然”な関数にのみ限定すれば，直観もかなりの程度に正しく，あまり大きな誤りを生じないことが多い．しかし，対象を実変数の一般の連続関数にまで拡げると，たちまち素朴な直観に反する反例が数多く現われる．19世紀の終り頃は，そうした傾向が特に激しかった時期である．“かつては例が作られるのは応用のためだったが，いまや例は我々の祖先の議論が誤まっていることを示すためにのみ作られる”といった某大家の悲鳴（?）が，それを端的に表わしている．

第二に，これと関連するが，解析学においては特定の立場から生ずる形式的に素朴な定義が，実用上“自然”とはいい難く，そのくい違いを示すための反例が多いことである．たとえば後に述べるが，関数を対応関係と考えて，定義域の位相を無視ないし軽視した立場では，点別収束の概念が自然かもしれないが，連続関数といった対象については，一様収束のほうがずっと“自然”な収束である．極端なことをいうと，いろいろの反例が作られたり，定

理を述べるのに多数の仮定がいるのは，採用した定義が“不適切”だと判定すべきだという意見さえある．これがあながち単なるにくまれ口とはいえないようなのである．

第三に，反例がしばしば新しい理論の突破口となるという点である．かつては“病的”でいみ嫌うべきと思われていた反例が，新しい見地からは，理論の基礎をなす重要な実例に変身する（正しくは研究者の態度が変わる）場合が多い．いたるところ微分不可能な連続関数は，19世紀には嫌われた招かれざる客であったが，ウィーナー（N. Wiener, 1894—1964）がブラウン運動のモデルに活用してから，積極的に認められるようになった．現在ではもっと深いおもしろい研究がなされ，なかには抽象的な数学が想像を絶する“怪物”を作りだしているのに，物理学者があきれかえった例さえある．

さらに，カオスやフラクタルといった“病的”な例が，けっして頭のおかしな数学者の考えだしたファンタジーではなく，その眼で注意すれば，自然現象のあちこちに，そのモデルらしい実例が姿を現わしているという事実が，最近十年ほどの間に広く認められてきた．いまやこれらは“特殊な反例”ではなく，“自然界に普遍的に存在する現象”として，重要な研究対象になってきている．

というようなわけで，実のところ“反例”という語は価値観を含む用語なのである．もとの命題ないしそれを含むパラダイムに固執すれば，反例は歓迎されない困った実例なのであろうが，逆にそれを否定した立場にたてば，反例は新しい理論を作るための有力な“実験材料”となりうる．意外に多くの数学者が，研究を進めて新しい定理を予測するとき，成立する例と，条件をゆるめすぎて成立しなくなる反例の両方から帰納的に試行錯誤をくりかえしているようである．アルキメデスの『方法』や，建部賢弘（1664—1739）の『綴術算経』といった文書は，当人の経験を基にした発見的手法を論じた貴重な文献である．また，ガウス（C. F. Gauss, 1777—1855）の日記には，数値的な実例から大胆に定理を予想した（後に証明した）例が記されている．計算機が手近なものになれば，こうした研究方法をもっと多くの数学者が利

用できるようになるだろう．その場合，多くの反例が重要な資料になるだろう．

他方，学習者の立場からいうと，反例は定理の意味や各仮定の必要性を正しく理解するための大事な材料である．ここでもそのことを考慮して，特定の命題に対する揚げ足とり的な反例よりも，普通の教科書にあまり書かれていない裏話で，学習者の心理にも立ち入った例を主とすることにした．この本は教科書ではないので，証明よりも“事実”に重点をおき，また必要以外のときには，定義を詳しく述べることをしない．つまり，読者に微分積分学の一応の知識があることを前提とした．証明が長いものはやむをえず文献を引用して説明を略したものもあるが，通例の命題に対して，証明がないと不安な方々は，各自で証明をつけるように努力するとよい．それがなによりのよい演習になることと思う．

実のところ，日時も紙数も限られて十分な調査ができず，反例よりも定理をあげた所が多い．解析学，特に微分積分学の入口について，筆者の感想を中心とした一つの考察として見てくだされば幸いである．

§2　実数の連続性

解析学の根本は，掘り下げてゆくと実数の連続性にゆきつく．これを点が“連続的”に動いてできる一次元の直線と対比させて，自然な順序関係に従って扱ううちは比較的無難であるが，ひとたびそれから離れて，たとえば有理数だけから連続性をながめようとすると，“奇妙”な現象が続出する．解析学を真に深く理解するには，それを乗り越えなければならない．

例1　$$0.999\cdots = 1.000\cdots \quad ?$$

これは反例というよりも，定理ないし約束である．これが心理的に受け入れ難いのは，表現が極端に異なる2数を同一視しなければならない点であろう．

では，もしもこの両者をあくまで相異なる数とみたらどうなるか？　もちろんその前に，たとえば有界単調数列は収束するといったことで，無限小数

の表わす値の意味は確定しているものとする．

そうすると $a=0.999\cdots$ と $b=1.000\cdots$ とは，小数の規約から $a<b$ であるが，両者の間に位置する数がありえないことになる．実数にすき間ができてしまい，連続性の一歩手前の**稠密性**（相異なる2数の間に必ず第3の数がある）が成立しなくなる(図1)．しかもこのすき間は，ここ一か所だけではない．あらゆる有限小数の所で，同様のすき間を生ずる．実数はばらばらな断片の集りになって，連続どころの話ではない(図2)．

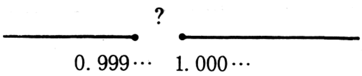


図1　すき間があるか？

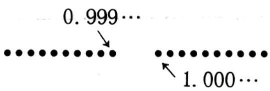


図2　実数はばらばら？

このすき間を埋める最も簡単な手段は，標題の関係式 $a=b$ を認めることである．

通例の位取り記数法は，桁が上がる（9999 → 10000）所で著しい記法の変化を生ずる．答が1になるべき数値計算が誤差のために 1.000002 になっても平気なのに，0.999999 となると気になるというのは，数学よりも心理の問題である．無限小数による実数論は，高木貞治先生の『新撰算術』以来多くの人々が試みているが（最近のものでは竹内啓『数の構造』(教育出版, 1979) がこの方法を採用している)，この方法ではある段階まで，有限小数の位置で増加列と減少列とを区別して扱わなければならない．特に初めから負の数をも含めて通例の絶対値表示で扱おうとすると，正負で増加と減少が逆の形式になり，扱いが大変複雑になる．これは本質的には技術上の難点にすぎないが，初心者を混乱させる点である．

例2　無理数 $\sqrt{2}$ の周辺

$\sqrt{2}$ に速やかに近づく有理数列 a_n/b_n を作ってみよう．

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = -1, \qquad \text{ゆえに} \quad (1-\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})^n = (-1)^n$$

を活用し

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}, \qquad a_n,\ b_n \text{ は正の整数}$$

と表わせば，$(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ であって，これから

$$|a_n/b_n-\sqrt{2}\,| = 1/(b_n(a_n+b_n\sqrt{2}\,)) < 1/(\sqrt{2}\,b_n{}^2)$$

を得る．この具体的な a_n/b_n の列（$n=1, 2, 3, \cdots$）は

$$\frac{1}{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{7}{5},\quad \frac{17}{12},\quad \frac{41}{29},\quad \frac{99}{70},\quad \frac{239}{169},\quad \cdots\cdots$$

一般に　　$a_{n+1} = a_n+2b_n,\quad b_{n+1} = a_n+b_n$

である．電卓をお持ちの方は，これらの分数の値と $\sqrt{2}$ との差を実際に計算してみることをおすすめする．

分母が q の分数は $1/q$ おきにあるから，どんな分母 q をとっても，任意の実数を $1/2q$ 以下の誤差で近似することができる．だから分母 q を大きくすれば近似がよくなるのは当然だが，これでは平凡すぎるのである．上の列では，分母 b_n の大きさに比べて近似が $1/b_n{}^2$ のオーダーになっていて，大変よい近似になっていることが重要である．

これも特定の命題の反例とはいい難いが，こういう無限列があることは，$\sqrt{2}$ が無理数である証拠なのである．それを示そう．もしも $\sqrt{2}$ が有理数であって，m/l という定まった分数で表わされたとする．この分数は既約でなくてもよいが，ともかく m, l は定数である．これを分数 p/q で近似するとしよう．m, l, p, q は正の整数としてよい．さて

$$\left|\frac{m}{l}-\frac{p}{q}\right| = \frac{|mq-lp|}{lq}$$

である．p/q が完全に m/l と一致しない限り，この分子は整数だから少なくとも 1 である．ゆえに，この差は $1/(lq)$ より小さくなれない．先の列 a_n/b_n の分子は漸化式からわかるように（$a_1=1$ だから）つねに奇数なので，$a_n{}^2=2b_n{}^2$ とはなりえない．ゆえに，$p/q=a_n/b_n$ は m/l と等しくなれない．したがって，$q=b_n$ として

$$1/(lb_n) < 1/b_n{}^2,\qquad \text{つまり}\qquad b_n < l$$

となる．l は定数で，n を大きくすれば b_n はいくらでも大きくなるから（$b_n < b_{n+1}$ だから），これは矛盾である．

これでわかるように，皮肉なことに，一般に有理数で非常によく近似でき

る実数は無理数なのである．$\sqrt{2}$ が無理数であることだけの証明に，上の論法はいささか大げさだが，ある数が無理数であることの証明に類似の論法が使われることが多い．

例3 稠密性と連続性．零集合

有理数は密にあるが，しかし可算個である．したがって有理数を $r_1, r_2, \cdots$ とするとき，任意の正の数 ε に対して，r_n に対してそこを中心とする長さ $\varepsilon/2^n$ の区間を作ると，有理数全体は長さの合計が $\sum\varepsilon/2^n=\varepsilon$ の可算個の区間で完全に覆われてしまう．こういう性質をもつ集合を（ルベーグ積分論で）**零集合**という．ルベーグ積分が成功した一つの原因は，“零集合という少数派の例外があっても天下の大勢に影響はない” とあっさり切り捨ててしまった点にあるという説は，一面の真理をとらえている．

しかし，任意の無理数 α にはそこに収束する有理数列 $r_{m(1)}, r_{m(2)}, \cdots$ があり，それらを含む区間列がある．そうすれば，α はいつかはどれかの区間に含まれてしまうのではなかろうか？ こういった逆説的な感じをもった方は少なくないと思う．

実際には，α にもよるが，$r_{m(k)}$ が α に近づくよりも，区間の長さが短くなるほうが速いために，α を覆いきれない場合が多いので，べつに矛盾ではないのだが，もう少し定量的に論じてみよう．

例4 いま 0, 1 の間にある（両端を除く）有理数のみを考え，それに対する番号のつけ方を，普通の方法と若干違う**ファレイ数列**として実行する．これは，両端に 0/1, 1/1 を（仮りに）おき，第 l 段階（$l=1, 2, \cdots$）で既存の相隣る数の間に，両端の数の分母同士・分子同士を加えた分数を合計 2^{l-1} 個作り，それらに順に 2^{l-1} から 2^l-1 までの番号をつけるものである．$l=4$ まで実行した結果を次に示す．丸中の数字は番号である．

$$\left(\frac{0}{1}\right)\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \left(\frac{1}{1}\right)$$

⑧ ④ ⑨ ② ⑩ ⑤ ⑪ ① ⑫ ⑥ ⑬ ③ ⑭ ⑦ ⑮

ここでは $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\to\frac{2}{5}$ という計算が堂々とまかり通る（?）ことになる！

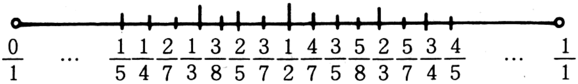


図 3 ファレイ数列

このようにしてできる分数はすべて既約分数であり，0と1の間の有理数がいつかは必ず現われることが証明できる．

さて，この列の k 番目の数に，$\varepsilon=1/2$ に相当する長さ $1/2^{k+1}$ の区間を与えたとき，左端の0はこの区間列で覆われないことを示そう．$r_1=1/2$ から始めて，それまでのどれよりも0に近い部分列は $r_2, r_4, r_8, \cdots$ であり，$n=2^l$ に対して $r_n=1/(l+2)$ である．ここを中心とする区間の左端は

$$a_n = r_n - 1/2^{n+2} = 1/(l+2) - 1/2^{2^l+2}$$

だが，これは $l=0$ のとき 3/8, $l>0$ のときは $2^l>l$ なので

$$a_n > 1/(l+2) - 1/4l > 0$$

であって，0に達しない．2の累乗でない番号 n では，$2^l<n<2^{l+1}$ とすると

$$r_{2^l} < r_n, \qquad 1/2^{n+1} < 1/2^{2^l+1}$$

だから，なおさら0に届かない．

前の例2の近似列をとって少し丁寧に考察すると，区間の内部でも，たとえば $\sqrt{2}-1$ が上述の区間列に含まれないことが証明できる．長さの和が1/2の上述の区間列は，実際に0と1との間ですき間だらけなのである．

例 5 可算集合は零集合だが，零集合は可算集合とは限らない．その**反例**は，カントルの三進集合である．区間 $[0,1]$ を三等分して中央の開区間 $]1/3, 2/3[$ を除き，以下毎回残った小区間列をすべて三等分して中央の開区

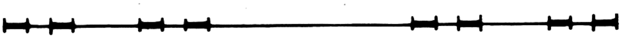


図 4 カントル集合へ向かって

間を除く．この操作の極限（全部の共通分）が**三進集合**である．残る長さは

$$1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}-\frac{2^2}{3^3}-\cdots = 1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(2/3)} = 0$$

である．（もっときちんと零集合であることが示される．）一方，これは三進

法で1を使わずに書ける数の集合であり（例1と類似の二意性を生ずるが，1/3は0.02222…，2/3は0.20000…と書きわける），それを2で割って二進小数と思えば0と1との間の実数と対応する．ここでも例1と同様の

$$0.011111\cdots = 0.100000\cdots$$

といった二意性を生ずるのは二進有限小数で表わされる値のみで，それらは可算個であり，ちょっとした修正で，実数との完全な一対一対応にすることができる．

なお，連続性を保存した一対一対応は，もちろん開区間と閉区間の間にはつけられないが，単なる**一対一対応**なら容易につけられる．それは一般的に次の有名な定理の特別な場合である．

ベルンシュタインの定理　二つの集合 A, B があり，A が B の部分集合 B_1 と一対一に対応し，B が A の部分集合 A_1 と一対一に対応するならば，A と B との間に一対一対応がある．

具体的な閉区間 $A=[0,1]$ と開区間 $B=]0,1[$ との間の一対一対応は，たとえば次のようにすればよい．

A 側	0	0.1	0.11	…	1/9	8/9	…	0.89	0.9	1
	↕	↕	↕		↕	↕		↕	↕	↕
B 側	0.1	0.11	0.111	…	1/9	8/9	…	0.889	0.89	0.9

それ以外の $x \in A \longleftrightarrow x \in B$ （同一の値）

§3　連続関数と微分可能関数

実数の連続性だけでも，論ずべき材料は多いが，解析学の本領は関数にあるので，そのほうに移ることにする．

われわれが日常“連続関数”といっている対象は，数学でいう連続関数でなく，むしろ有界変動関数を考えている場合が多い．1変数の**有界変動関数**の本来の定義は，定義域の区間 $[a, b]$ を任意に分割して

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

としたとき，その全変動

$$\sum_{k=1}^{n} |f(a_k)-f(a_{k-1})|$$

が（分割に依存しない）定数を超えないというものである．しかし実用上では，これと同値な性質：

単調増加関数 + 単調減少関数　と表わされる

を定義のように考えたほうが，便利かもしれない．

有界変動関数は可算個の点を除いて連続であるが，連続性と有界変動性とは互いに無関係である．その例を後に述べる．

実のところ，われわれが“連続”というとき，暗に“絶対連続”を念頭においているのかもしれない．関数 $f(x)$ が**絶対連続**であるとは，任意に与えられた $\varepsilon>0$ に対して，適当に $\delta>0$ を選ぶと，

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k-a_k) < \delta$$

をみたす互いに素な任意の有限個数の区間 $[a_k, b_k]$ の族に対して，

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon$$

が成立するようにできることである．絶対連続な関数はもちろん連続であるが，有界変動でもある．したがって，有界変動でない連続関数は絶対連続ではない．C^1 級（微分可能で導関数が連続）あるいは微分可能で導関数 $f'(x)$ が有界な関数は，絶対連続である．また，(ルベーグ)積分可能な関数の不定積分

$$f(x)=\int_a^x g(t)dt$$

は，絶対連続である．

さて，連続と有界変動のくい違う例をあげよう．

例 1　x の整数部 $\lfloor x \rfloor$ は，単調な階段関数であって，有界変動だが連続ではない(図 5)．なお，これを“$[x]$ と書いて，ガウスの記号という”という

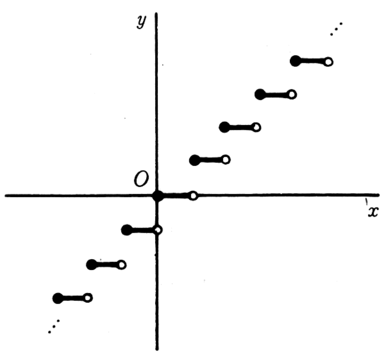


図 5　階段関数

記述が多くの高等学校の教科書にあるが，これは古いドイツの習慣が明治の先人によって日本に輸入されて定着した方言（?）らしい．このごろでは，一般の角カッコと区別して $\lfloor x \rfloor$ と書き，**床関数**（flore function）ということが多くなった．これに対して，小数部を切り上げた値を $\lceil x \rceil$ と書いて**天井関数**（ceiling function）ということがある．半分しゃれだが，言葉が時代とともに変化する例と思う．

他方，**ワイエルストラスの関数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \qquad (0<a<1,\ b \text{ は奇数で } ab>1+3\pi/2)$$

のような，いたるところ微分できない連続関数は，有界変動ではない．また前述のように，絶対連続な関数，特に C^1 級関数は連続かつ有界変動である．最後に，有理数で 1，無理数で 0 という**ディリクレの関数**は，連続でも有界変動でもない．

有界変動とか単調増加といった性質は，大域的な条件である．これに対して，連続とか微分可能という性質は，局所的な性質である．局所的というのは，詳しくいうと，二つの関数 f, g が点 a のある近傍で一致するとき $f \sim g$（同値）という同値類で関数を類別した類である**関数芽**について意味のある性質なのである．

ところで私の経験では，“関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ の各点で連続［あるいは微分可能］のとき，$f(x)$ を区間 $[a, b]$ で連続［あるいは微分可能］という”という定義自体に異和感を訴える学生が多い．あまりにあたりまえなことを述べているようにみえるのがその原因らしいのだが，これはけっして自明な内容やくりかえしではない．区間で，という大域的な性質が，この場合には各点での条件の集積として定義できることを，主張しているのである．ただし，文章が長くなるのをいとわなければ，“区間で連続”という略称をやめて，毎回“区間の各点で連続”といえばすむ．この定義は数学者の“けち精神”の発露らしいが，それで可能な節約はたいした量ではないらしい．

これに対して，一様連続とか一様収束とかは，大域的な性質というべきで

ある．反例ではないが，重要なわりにあまり教科書に書かれていない定理を一つあげておく．

例 2　$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ を含む（もう少し大きい）開区間で定義されていて，その差分商 $[f(x+h)-f(x)]/h$ が $h\to 0$ としたとき，x について**一様に**ある関数 $g(x)$（じつは $f(x)$ の導関数）に収束するための必要十分条件は，$f(x)$ が $\mathbf{C}^1$ **級**，つまり微分可能であって導関数が連続なことである．

この定理の証明は容易である．そうなら $f'(x)$ は x について連続な差分商という関数の一様極限だから，連続である．逆に $f(x)$ が C^1 級なら，平均値の定理で差分商を $f'(\xi)$ の値で表わし，$h\to 0$ なら $\xi=\xi(x,h)\to x$ であることと，$f'(x)$ が区間 $[a, b]$ で一様連続なことを活用すればよい．なお類似の性質は，多変数関数の場合でも“一様に全微分可能”という概念におき換えて，成立する．

例 3　一様収束と極限の連続性

連続関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束すれば，$f(x)$ も連続である．一様収束でない点別収束では $f(x)$ が連続と限らない例は，アーベル（N. H. Abel, 1802—1829）が初めてフーリエ級数で示したが，その考えをまねすれば，次のような例ができる：

$$\text{区間 } [0,1] \text{ で}\quad f_n(x) = x^{1/(2n+1)}.$$

これは連続である．点別収束した極限関数 $f(x)$ は，

$$f(0) = 0,\quad -1\leqq x<0 \text{ で } f(x) = -1,\quad 0<x\leqq 1 \text{ で } f(x) = 1$$

という不連続関数である(図 6)．$f_n(x)=(\operatorname{sgn} x)\cdot|x|^{1/n}$ でも同じだが，少しわざとらしいので奇数乗根のみとした．

他方，一様収束しなくても，極限が連続になる例がある．

$$\text{区間 } [0,1] \text{ で}\quad f_n(x) = nxe^{-nx}$$

とおけば，極限関数 $f(x)$ は 0 である．$f_n(0)$ はつねに 0 であり，$x>0$ なら $a=nx$ と考えると，$a\to+\infty$ のとき $ae^{-a}\to 0$ だからである．しかし，$f_n(x)$ は $x=1/n$ で最大値 e^{-1} をとり，これは 0 に近づかない．図 7 のように，x_0 を固定すれば，いつかはこの山が x_0 よりも左にくるので $f_n(x_0)\to 0$

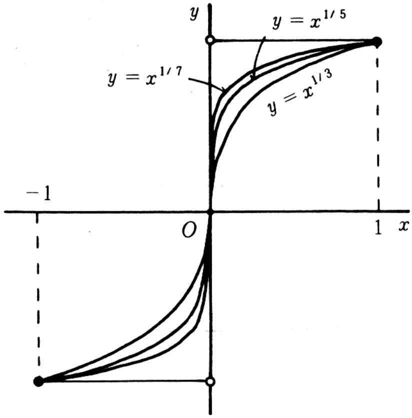


図 6 極限は不連続

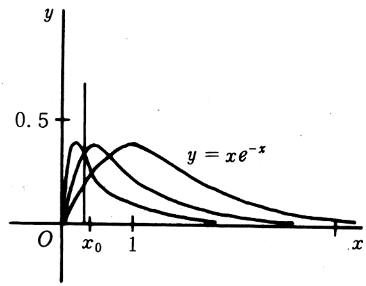


図 7 (便宜上縦横の比を違えてある)

となるが，その n が x_0 によって一定でないので一様収束にならない（読者は，これをきちんと“公文書式”に記述してみるとよい）.

もしも連続関数列 $f_n(x)$ が，番号 n について**単調に**（つねに増加，またはつねに減少して）連続関数 $f(x)$ に収束すれば，この収束は一様である．これは**ディニの定理**とよばれるものである．

例 4　不連続性と微分不可能性

われわれは不連続というと跳びのある場合（図5のような）を連想するのが普通である．しかし，このように両側からの極限が別々に存在するのは，数学的にいうと一種の“準連続”な場合なのである．数学でいう“真の不連続”は，$\sin(1/x)$ の $x=0$ でのように，$x\to a$ の極限値が存在しない場合なのである．

余談ながら，マイコンで $y=\sin(1/x)$ の正確なグラフ（図9）を描くことは，かなり大変な仕事である．人間は“戯画的”に特徴をとらえて“それらしい”図8のようなグラフを描くし，そのほうがかえってわかりやすいかもしれない．もっとも，左右対称に偶関数のグラフのように描いた例は，いくら“本質的でない”といっても，sin という**奇関数**を表示している以上，いただけない．

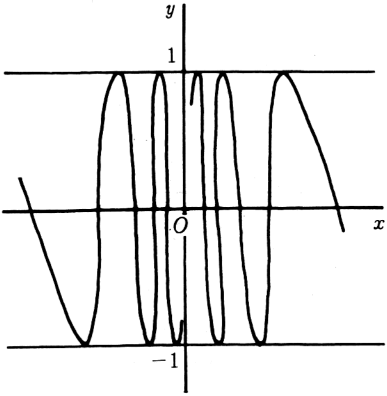


図 8　$y = \sin(1/x)$ らしいグラフ

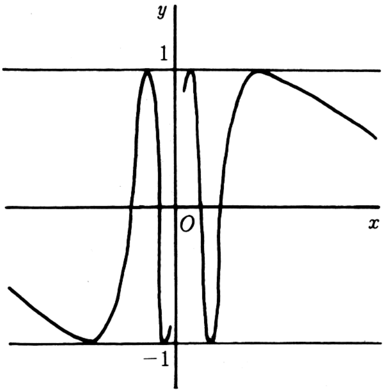


図 9　$y = \sin(1/x)$

微分不可能性も，通例よくあげられるのは $y = |x|$ の $x = 0$ である(図10). これは，左右の片側微分係数 $f'_+(x)$ と $f'_-(x)$ とが存在して，相等しくない場合である．しかし，数学的に本質的な微分不可能性は，

$$y = x \sin(1/x)$$

($x = 0$ では値を 0 とする)

の $x = 0$ でのように，片側の微分係数も存在しない(差分商の優極限と劣極限とが一致しない)場合である(図11).

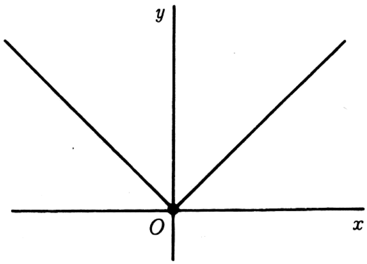


図10　$y = |x|$

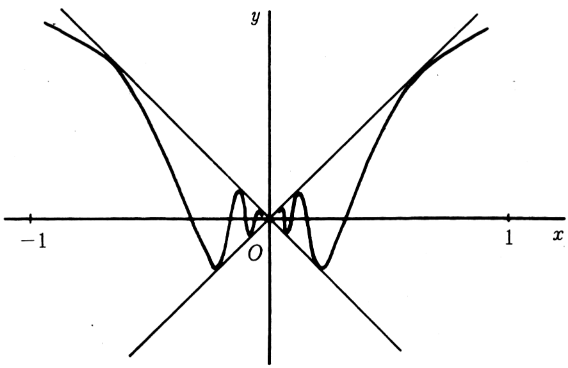


図11　$y = x \sin(1/x)$

ところでこのほかに今一つ，$y=x^{1/3}$ の $x=0$ でのように，グラフの曲線には定まった接線があるが，それが y 軸と平行で，いわば微分係数が ∞ になる場合がある(図12)．これも独立変数 x の関数 $f(x)$ としては**微分不可能**である．しかし微分方程式の解の場合のように，x を特権的な方向と考えるよりも，むしろ平面上の曲線とみなしたほうが好都合な場合には，この曲線は原点で“微分可能”と考えたほうが便利である．こういうと混乱しそうだが，これは平面曲線とその特別な表現形式とを混同するためである．普通には混同してもほとんど支障がないから伝統的にそうしているのだが，厳密には表現形式を変えた曲線は，図形としては同一でも，別の曲線とみなすべきである．それはちょうど厳密な形式的定義では，同じ対応規則による $y=x^2$ でも，定義域が違えば別の関数とみなすべきなのと同様である．

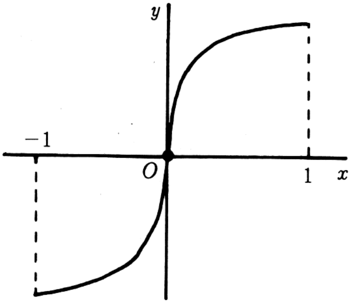


図12　$y=x^{1/3}$

しかし関数としては，これはやはり“微分不可能”としておかないと，平均値の定理が成立しなくなってしまう．

例5

$$-1 \leqq x \leqq 1 \quad で \quad f(x)=\sqrt{|x|}$$

をとると，$f(1)=f(-1)$ なのに，$f'(\theta)=0$ となる点 $-1<\theta<1$ がない．これは $x=0$ で微分不可能なためである(図13)．

もっともこの例では，$x=0$ において，左微分係数 $f'_-(0)=-\infty$，右微分係数 $f'_+(0)=+\infty$ であって，両者が相異なるから，文句なし(?)に微分不可能である．これに対して $f(x)=x^{1/3}$ では平均値の定理が成立する．この場合には $f'_-(0)=+\infty$，$f'_+(0)=+\infty$ な

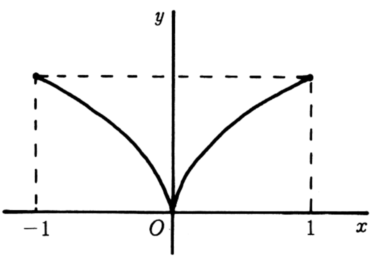


図13　$y=\sqrt{|x|}$

ので，“広義の微分可能”とすることが多い．このような片側微分係数が存在して，ともに $+\infty$，または $-\infty$ のときを許しても，平均値の定理が成立することが証明できる．

ところで，導関数 $f'(x)$ は，差分商 $[f(x+h)-f(x)]/h$ という，x については連続な関数の点別収束した極限だから，ベールの1級関数なので，任意の開区間内に必ず連続点をもつ．したがっていたるところで微分可能だが，導関数がいたるところ不連続な関数は存在しえない．かつてそういう関数を構成したといってきた学生があったが，彼は不幸にして，“$f(x)$ の不連続点の極限点はやはり $f(x)$ の不連続点”だと早合点していたのであった．——解析関数の特異点の集合の極限点は真性特異点になるが，連続関数が一点で連続でも，その近傍の各点で連続にはなってくれない．

例 6 $f(0)=0$; $1/(n+1)\leqq x<1/n$ のとき $(n=1,2,3,\cdots)$ $f(x)=1/n$; $x<0$ のとき $f(x)=-f(-x)$ と定義すれば，$x=\pm 1/n$ $(n=2,3,\cdots)$ は不連続点だが，$f(x)$ は $x=0$ において連続である(図14)．——ε-δ 論法をあてはめてみるとよい．$f(x)$ の値は 0 と $2x$ との間にあるので，$x\to 0$ のとき $f(x)\to 0$ である．

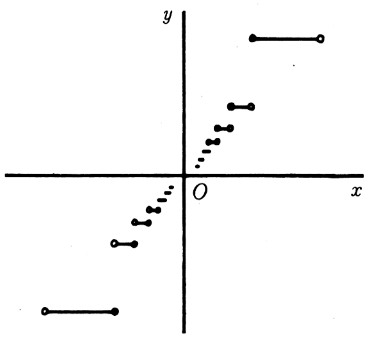


図14 $x=0$ では連続

また，微分不可能な点が次第に密になる関数列の一様収束した極限関数が，微分可能になることがある．

例 7 その典型例は，コーシーの多角形法（オイラー法）によって作った微分方程式 $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ の近似解の折れ線列である．具体的には，x_n に対して，解の近似値 y_n が定まったとき，$x_{n+1}=x_n+h$ での値を $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ とし，$(x_n,y_n),(x_{n+1},y_{n+1})$ を線分で結んで，それらの集りとして折れ線を作る．$f(x,y)$ がリプシツ条件をみたせば，$h\to 0$（一般に $x_{n+1}-x_n$ の最大を 0 に近づける）とするとき，この折れ線列は一様にある関数 $y=\varphi(x)$ に収束する．個々の折れ線は x_n において角があって微

分可能でないし，そういう点が次第に増えるのに，皮肉にも(?)極限の $\varphi(x)$ は微分可能であって，もとの微分方程式の解になる．もちろんこれは x_n での左右の微分係数の差が次第に小さくなるといった事情があって，よく考えればむしろ当然な話であるが，条件の悪いものの極限がかえって好条件になるということもありうる一例である．

ところで導関数について，もしも $\lim_{x\to a} f'(x)=\alpha$（有限）が存在すれば，平均値の定理によって $f(x)$ は $x=a$ で微分可能で $f'(a)=\alpha$ となる．したがって導関数が連続でないのは，極限値が存在しない型に限られる．

例 8　その典型例は

$$f(x) = x^2\sin(1/x) \qquad (f(0)=0 \text{ とする})$$

である．この関数は $x=0$ で微分可能であって $f'(0)=0$ だが，$x\neq 0$ での $f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$ は $x\to 0$ のとき極限値をもたない．

また，導関数 $f'(x)$ は“中間値の定理”をみたす．したがってこれは，連続でなくても中間値の定理をみたす関数がありうる例にもなっている．

このほかにもいろいろと注意すべき例はあるが，これらは初めにも述べたとおり，点別収束の概念が解析学での実用にはむしろ不適切であり，一様収束が“自然な”収束である表れと理解したほうがよさそうである．

以上もっぱら1変数の関数のみを論じた．多変数の場合には，偏微分可能性と全微分可能性などをめぐって数多くの微妙な例がある．それらは多くの教科書にあるし，また特定の座標系に依存する形式的な面が強いと思ったので，ここにはあえて論ずるのを省略した．

§4　導関数の正負と関数の増減

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ において広義の単調増加で，各点で微分可能ならば，差分商の極限として $f'(x)\geqq 0$ である．逆に，$f(x)$ が各点で微分可能であってつねに $f'(x)\geqq 0$ ならば，たとえば平均値の定理によって $f(x)$ は広義の単調増加である．したがって等号も許せば，$f'(x)\geqq 0$ は $f(x)$ が（広義の）単調増加であるための**必要十分条件**である．

しかし等号をとってしまうと，$f'(x)>0$ は $f(x)$ が狭義の単調増加であるための十分条件ではあっても，必要条件ではない．

例1　$y=x^3$ は狭義単調増加（$a>b$ なら $f(a)>f(b)$）だが，$y'=3x^2$ は $x=0$ のとき0になる．――もちろん $f'(x)\geqq 0$ ではある（図15）．

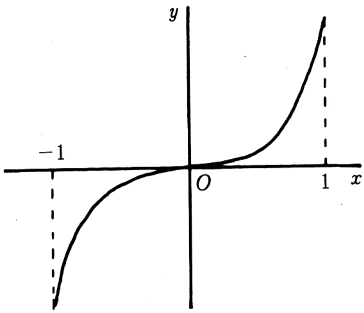


図15　$y=x^3$

一般に，$f'(x)\geqq 0$ であって，孤立点で $f'(x)=0$，他では $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は狭義単調増加である．あるいはもう少しゆるめて，つねに $f'(x)\geqq 0$ であってかつ任意の開区間中に必ず $f'(x)>0$ である点があれば，狭義単調増加になる．

この $f'(x)$ の符号と増減に関する重要な定理では，連続性が本質的である．あいだに一点でも不連続な点があれば成立しない．

例2　$f(x)=\tan x$（ラジアン変数）については，$f'(x)=1/\cos^2 x$ であってつねに正だが，$\tan 1<\tan 2$ ではない．じっさい，$\tan 1>0, \tan 2<0$ である．――これはもちろんこの間の $x=\pi/2=1.57\cdots$ で $f(x)$ が不連続になるためである．同様に，$\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$（小数部）の導関数は（微分可能な点では）つねに1だが，$\{0.8\}<\{1.2\}$ ではない．あいだの $x=1$ で不連続になっている．

上記の定理の証明は，伝統的に平均値の定理によるものが標準的である．というよりロルの定理，平均値の定理は，この定理を厳密に証明するために考えられたものである．いまでは，平均値の定理を直接表面にださず，ハイネ-ボレルの被覆定理を使ったり，区間縮小法による証明も工夫されていて，私自身はそのほうを好むのだが，どうもそういう講義は評判が悪い．先生も学生も予想以上（?）に保守的であって，伝統的な流儀から逸脱することを極度におそれているといっては失礼になるだろうか．

ところで一頃，$f'(a)>0$ ならば，そこで $f(x)$ が“増加の状態にある”

という説明が流行（？）したことがある．これは数学的に厳密に定義された概念ではなく，平均値の定理を避けようとして，かえってあいまいな直観をもちこんだ改悪（？）であった．もしも，この語が

"a に十分近い x について，$x>a$ なら $f(x)>f(a)$，
$x<a$ なら $f(x)<f(a)$"

という意味ならば，$f'(a)$ が差分商 $[f(x)-f(a)]/(x-a)$ の $x\to a$ とした極限値であるから，これは正しい．しかしこの事実を，$f(x)$ の大域的な増加性と結びつけるには，なんらかの補助的な定理が必要となる．たとえば，各点で $f'(x)>0$ なら，x を含むある区間 I_x でこの性質があるから，ハイネ-ボレルの定理により，その有限個で被覆し，中間の分点を経由して $a<b$ のとき $f(a)<f(b)$ を結論する，といった手段がいる．上述の区間の長さに一様性があれば簡単であり，それは $f'(x)$ が連続なら，前出の差分商が導関数に一様収束することから結論できる．実用上では，$f'(x)$ の連続性をも仮定して，このように論ずるほうが簡便かもしれない．

ところで，もしも"増加の状態にある"という用語を

"a を含むある区間があって，そこでつねに増加，すなわち
その区間内で $x<y$ なら $f(x)<f(y)$"

という意味に使うのならば，これは $f'(a)>0$ という条件だけからは導くことができない性質であって，上記の命題は偽になる（$f'(x)$ が a の近傍で連続と仮定すれば正しいが）．

例 3　　$f(x)=(x/2)+x^2\sin(1/x)$,　　ただし　$f(0)=0$

とする（図16）．この関数は $x=0$ で微分可能であって，$f'(0)=1/2>0$ である．しかし，$x\neq 0$ のとき

$$f'(x)=\frac{1}{2}+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

であって，$x=1/2n\pi$ のとき $f'(x)<0$ である．つまりそこでは減少している．こういう点が，0 のいくらでも近くに無限にある．この $f(x)$ は 0 の近くでは増えたり減ったりを無限回くりかえしながら，全体として増えるほう

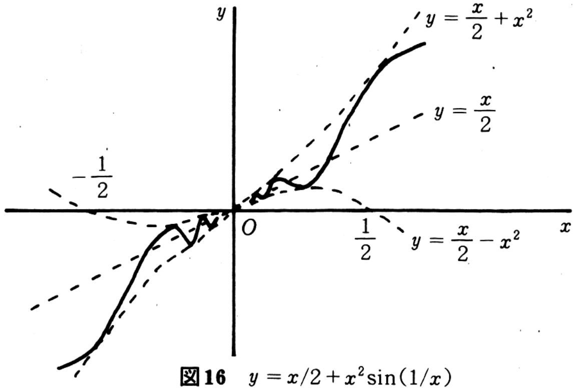


図16　$y = x/2 + x^2 \sin(1/x)$

が勝っている感じである．

同じように $f'(a)=0$ であって，a が $f(x)$ の極小点であっても，x が a より小さい所から増加してゆくとき，$f'(x)$ が負から正に移るとは限らない．

例 4　$f(x) = x^2(2+\sin(1/x))$，

ただし　$f(0) = 0$

とする(図17)．(これは奇関数でも偶関数でもないから，$\cos(1/x)$ としたほうがよいかもしれないが原理は同じである．) $2+\sin(1/x) \geqq 1$ だから，$x \neq 0$ なら $f(x) > 0$ なので，$x=0$ は $f(x)$ の最小点であり，したがって極小点でもある．しかし，$x \neq 0$ のとき

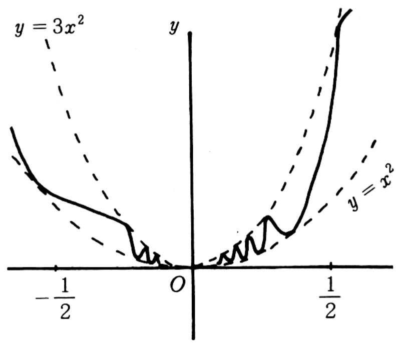


図17　$y = x^2(2+\sin(1/x))$

$$f'(x) = 4x + 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$$

であって，これは x が正でも負でも，x の近くで正にも負にもなりうる．なお，x^2 を x^4 とすれば，$f(x)$ が $x=0$ の近傍で C^1 級であるように修正することもできる．

もちろん，この例 3, 4 の $x=0$ はいずれも特異点である．$f(x)$ を解析関数に限定すれば，$f(x)$ ($f'(x)$ も) の零点は孤立点であって，$f'(a) > 0$ なら a の近傍でつねに $f'(x) > 0$ であるし，$f'(a) = 0$ かつ a が極小点なら

$f'(x)$ は a で負から正に変わる．初歩の微分積分学では，このような“好都合”な場合だけで十分であろうし，ことさら“妙な”例をあげることはないのかもしれない．しかし，日常“普通に考えられる”場面は，あくまでこのような特別な場合だけである．一般に C^1 級関数とすると，すでに“素朴な常識”に反する例が多数現われることを，ある程度より深く専攻しようという学生諸氏は，一度は認識することが必要であろう．他方，直観的に“やさしく”説明しようとして，かえってあいまいで混乱を生じやすい概念を軽軽しくもちこむ結果に終わることを，いましめるべきだという例かもしれない．

さて，$f'(x)$ の符号と $f(x)$ の増減との関連がつけば，$f'(x)=0$ は $f'(x)\geqq 0$ かつ $f'(x)\leqq 0$ だから，つねに $f'(x)=0$ なら単調増加かつ単調減少，したがって定数になる．この性質は不定積分の自由度が付加定数のみであるという事実にとって基本的だが，これもまた一点でも不連続（微分不可能）な点があれば成立しない．階段関数がそのよい例である．

もう少し厄介なのは，連続で広義単調増加，そしてほとんどいたるところ（測度 0 の集合を除いて）$f'(x)=0$ なのに定数でない関数である．このような性質をもつ関数を，ルベーグの特異関数という．その典型例は次のもので，このグラフを俗に“悪魔の階段”という（図18；もちろんこれは正確には描けないので，近似図である）．

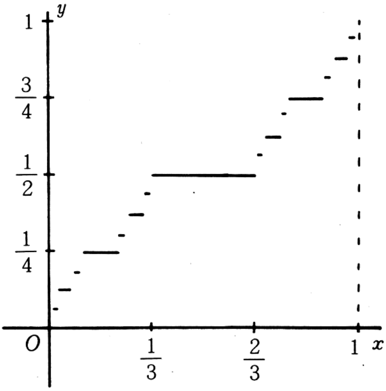


図18 悪魔の階段

例 5 §2例5で述べた，カントルの三進集合において，除かれた区間において $f(x)$ を順次 1/2；1/4, 3/4；1/8, 3/8, 5/8, 7/8；…… とおく．一般的にいえば，除かれた区間の左端と右端を表わす三進小数を 2 で割った小数を二進小数とすると，§2例1と同じ理由で両者は同一の値を表わすので，それをその区間での $f(x)$ の値とする．た

とえば，最初に除かれた区間では

$$\frac{1}{3} = 0.02222\cdots \to 0.01111\cdots = 0.10000\cdots \leftarrow 0.20000\cdots = \frac{2}{3}$$

$$\hookrightarrow 1/2$$

である．三進集合自体に属する点では，このようにして定義される $f(x)$ の極限値をとると，連続単調増加な関数を得る．それは実質的に三進小数で展開した値を2で割って，それを二進小数として読んだ値に等しい．この関数は，除かれた区間上では定数であってそこで $f'(x)=0$ であるが，$f(0)=0$，$f(1)=1$ であって，全体としては定数ではない．

このグラフは積分論以外に，近年フラクタルの一例としても見直されている．

導関数 $f'(x)$ の符号は，もとの関数 $f(x)$ の増減と関連しているが，同様に2階導関数 $f''(x)$ の符号は，もとの関数の凸凹と関連している．しかも2階導関数は，1階導関数を経由せず，直接に中心差分商の極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

として定義できる．$f(x)$ が C^1 級で $f'(x)$ が微分可能ならば，実際にこの極限値が本来の2階微分係数と一致する．——この事実は，たとえば0/0の“不定形の極限値”に関するロピタルの定理から容易に証明できる．しかし $f'(x)$ が存在しないのに上の意味の $f''(x)$ が存在する——いわば1階がなくて2階がある——関数も存在する．そのへんにおもしろい“反例”が数多いが，それらを詳しく論ずるためには，“構成的数学”の立場からしばしば問題になる“実数を整列させた集合”ないしは“実数を有理数で類別した類の代表系”などを使う話になるので，ここでは全部割愛することにした．

関数値の増減と関連した**極値の問題**は，1変数の場合はまだ比較的簡単であるが，多変数になると，さらに微妙な問題が生ずる．ここでは一つだけ，“厳密の権化”と信じられていたワイエルストラス（K. Weierstrass, 1815－1897）大先生も間違えた因縁づきの歴史的な反例を示しておこう．

1変数の場合には $f(x)$ が $x=a$ の近傍で C^1 級であり，$x=a$ において

$f'(x)$ が微分可能であって，$f'(a)=0$, $f''(a)>0$ ならば（$f''(x)$ の連続性を仮定しないでも），$x=a$ は $f(x)$ の狭義の極小である．しかし，これは1変数の特殊性がからんでいて，多変数では類似の定理はそのままでは成立しない．$f(x,y)$ が $x=a$, $y=b$ の近傍で C^2 級であり，

$$f_x(a,b)=0, \qquad f_y(a,b)=0, \qquad f_{xx}(a,b)>0,$$
$$(f_{xy}(a,b))^2 < f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b)$$

ならば，$x=a$, $y=b$ が $f(x,y)$ の狭義の極小である，というのは正しい．しかし，2階偏導関数が (a,b) において連続でなく，不等式の成立する範囲に，方向による一様性がないと，狭義の極小という結論は導かれない．

例 6 $f(x,y)=x^2+y^2-5x^2y^2/(x^2+y^2)$, ただし $f(0,0)=0$ とおく．$x=0, y=0$ において

$$f_x=0, \qquad f_y=0, \qquad f_{xx}=2, \qquad f_{xy}=f_{yx}=0, \qquad f_{yy}=2$$

であって，上の不等式はすべて満足される．しかし，$(0,0)$ は $f(x,y)$ の極小点ではない．$y=ax$ とおくと $f(x,ax)=x^2(1-3a^2+a^4)/(1+a^2)$ であるから，たとえば $a=1$ のとき $f(x,y)<0$ であって，原点のいくらでも近くに $f(0,0)$ より値の小さい点がある．じつは，図19の斜線部で負である．

例 7 原点を通るすべての直線上で $(0,0)$ が $f(x,y)$ の極小点であっても，$f(x,y)>f(0,0)$ が成立する区間の一様性がなければ，2変数の関数として

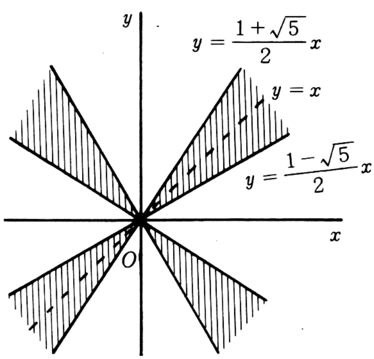


図 19 $x^2+y^2-5x^2y^2/(x^2+y^2)$ は斜線の部分で負

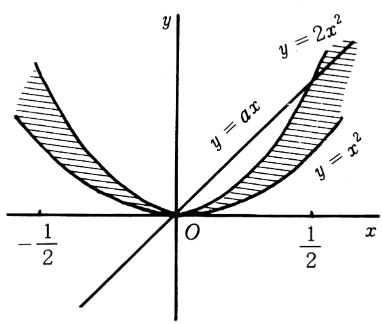


図 20 $(y-x^2)(y-2x^2)$ は斜線部で負

$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小とは限らない．次の**ペアノの例**が有名な一例である．

$$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2).$$

$y=ax$ 上では $x=0$ はつねに極小だが，$y=3x^2/2,\ x\to 0$ とすれば，原点にいくらでも近い点で $f(x,y)<0=f(0,0)$ であって，原点は f の極小点ではない(図20)．

§5　級数・無限乗積

級数や無限乗積は，ある意味では数列の特別な形態であるが，それらをめぐって多くの反例がある．ここではなるべく普通の教科書にあまりないような例を拾ってみよう．

普通の実数あるいは複素数の級数では，$\sum a_n$ の絶対値級数 $\sum|a_n|$ が収束する**絶対収束**と，項の順序をどう入れかえても必ず収束する**可換収束**（この場合その和は一定になることが証明できる）とは同値であって，区別する必要はない．しかしこのことは，a_n を含む空間を無限次の完備なノルム空間に拡張すると，必ずしも成立しなくなる．ノルムをとった級数が収束するのを絶対収束とすると，そのとき可換収束することが証明できるが，逆は必ずしも成立しない．しかし，その例は厄介である．以下では，a_n がすべて普通の実数または複素数の場合のみを考察することにする．

まず級数の“収束の速さ”は，理論上ではそれほど重要ではないかもしれないが，計算機による数値計算においては本質的な役割りを果す．十数年前当時の計算機で $\sum_{k=1}^{n}(1/k)$ の部分和を計算して，この級数が“10位の値に収束するらしい”と予測した中学生があった．私は正直いって感心した．この級数を正直に加えて(すなわち和を近似する公式から計算したのでなく)，和が100を超えるまで計算することは事実上不可能である．——うそだと思ったら，e^{100} がどれくらいの数であるか概算してみるとよい．——ジョセフソン素子の1000倍速い計算機を，宇宙の初めから現在まで動かし続けても，e^{80} 回の演算は実行できない．

既存の計算機の内では $\log x$ は“事実上有界”な関数であり，$\log\log x$ の

項が入っている予想は，直接には検証できない．もっともこれは数学者の側からいえば，率直にいって既存の計算機の設計ミス(?)といいたくなる現象なのである．しかし，その問題をここで論ずるのは場違いであろう．

とりあえず，次の事実だけを注意しておく．

例1　どんなにゆっくり収束する正項級数 $\sum a_n$ に対しても，それよりゆっくり収束する正項級数 $\sum b_n$ があるし，どんなにゆっくり発散する正項級数 $\sum c_n$ に対しても，それよりゆっくり発散する正項級数 $\sum d_n$ がある．

この命題の意味は，前半は $\sum a_n = s$, $\sum b_n = t$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(t-\sum_{k=0}^{n} b_k\right)\Bigg/\left(s-\sum_{k=0}^{n} a_k\right) = +\infty$$

である．後半は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} d_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{n} c_k = 0$$

である．この証明には，級数 $\sum b_k, \sum d_k$ を構成してみせればよい．前半については，$\sum a_n$ の残差を $s-\sum_{k=0}^{n} a_k = s_{n+1}$, $s_0 = s$ とおくと，$\{s_n\}$ の列は単調減少して 0 に収束する．$b_n = \sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n+1}}$ とおけば，$\sum b_n$ は $\sqrt{s} = t$ に収束して

$$t-\sum_{k=0}^{n} b_k = \sqrt{s} - (\sqrt{s_0} - \sqrt{s_{n+1}}) = \sqrt{s_{n+1}},$$

$$\left(t-\sum_{k=0}^{n} b_k\right)\Bigg/\left(s-\sum_{k=0}^{n} a_k\right) = 1/\sqrt{s_{n+1}} \to +\infty$$

となる．後半については，$\sum c_n$ の部分和を $u_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ とおけば，u_n は単調増加して $+\infty$ に発散するから，$d_n = \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}$, $d_0 = \sqrt{u_0}$ とおけば $\sum_{k=0}^{n} d_k = \sqrt{u_n} \to +\infty$ で，しかも $\sqrt{u_n}/u_n \to 0$ である．

もちろんこれは一例であって，他にもいろいろの構成法がある．

正項級数については，収束の理論上の条件は，部分和が有界とか，コーシーの条件とかがあるが，具体的な判定法については，必ずそれでは収束・発散が判定できない場合が残る．しかし，それらについて詳しい例をあげることはやめることにする．

ところで，正項級数の和は，$+\infty$ である場合もこめて，任意の有限部分和

の集合の上限といった，一般的な意味をもつが，絶対収束でない収束級数の和は，高度に自然数の順序に依存する．以下，特に交代級数を中心にして，その種の例をあげることにする．

交代級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ $(a_n>0)$ の項の列 a_n が単調に減少して0に収束すれば，もとの級数は収束である(**ライプニッツの定理**)．これは区間縮小法で容易に証明できる．しかしこの定理は，a_n が単調減少（厳密にいえば n の関数として $\{a_n\}$ が有界変動）でないと，必ずしも成立しない．――私が初めて助教授になって講義を始めたときの最初の演習で，この反例を作らせたところ，a_n が単調減少して0でない値に収束する例を作った学生が続出したのに閉口した失敗の思い出がある．級数が普通の意味で収束すれば，項は0に収束するのだから，そのような反例は自明であるが，題意の説明不足だった．

例 2 $$1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n,$$

詳しくは $\quad a_{2m}=2/(m+2),\quad a_{2m+1}=1/(m+2).$

この級数の項は0に収束するが，初めの $2m+1$ 項の和は $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m+2}$ であり，これは $+\infty$ に発散する．

もちろんこの級数は，正の項の和も負の項の和も発散するから，項の順序を変更すれば，任意の有限の値に収束するようにできる．具体的にやってみせるのは大変だが，条件収束級数に関して，次の例は有名である．

例 3 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

は収束して，和は $\log 2$（自然対数で，値は $0.69315\cdots$）である．――もっとも，特別な加速法を工夫せずに，直接にこの部分和を数値計算することは，そういう方法ではうまく計算できないことを示す目的以外にはやらないでほしい．

正の整数 p, q を定め，この級数の正の項を p 個，負の項を q 個，と最初から交互にとって並べ変えた級数を作ると，その和は $\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$ になる．

この事実は，この級数を $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n/n$ の $x=1$ の場合と考え，積分で

表現して計算すれば証明できる．

なおライプニッツの定理は，次の形に一般化できる．

定理 $a_n \geqq 0$ が単調に減少して 0 に収束し，$\sum b_n$ の部分和が有界（すなわち，$\left|\sum_{n=0}^{m} b_n\right| \leqq M$ である m に依存しない定数 M がある）ならば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ は収束する．

ライプニッツの定理の場合には $b_n = (-1)^n$ で，その部分和はつねに 0 か 1 かである．この場合でも a_n が単調減少でなければ，必ずしも成立しない(上の例がすでにその反例である)．

例 4 いささか揚げ足とり的だが，項が

$$a_{2m} = 2^{2^m} + 1/m, \qquad a_{2m+1} = -2^{2^m} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

で与えられる級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は“$+\infty$ に発散”であって，“振動”ではない．ただ a_{2m} までの部分和は“急激に”，a_{2m+1} までの部分和は“緩慢に”，$+\infty$ へ発散する．ただし，実用上このような正負のきわどい打ち消しを含む級数は，たいてい“数値的に不安定”であって，いい加減に計算すると答がどうなるか保証できない場合が多い．

次に，**無限乗積**を論ずる．積では 0 が特別なので，通例，次のように定義する．項に 0 が無限にある無限乗積は，当面，考察の対象外とする．0 が有限項の場合には，0 の項を除いた残りの部分和からなる無限乗積の収束・発散をもって，その収束・発散を論ずる．収束するとき，0 が実際にあれば積を 0 とする．さて，すべての項が 0 でない無限乗積 $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ について，その部分積 $p_m = \prod_{n=0}^{m} a_n$ の列が 0 でない有限の一定値 p に収束するとき，無限乗積 $\prod a_n$ は収束するといって，その積を p とする．このとき項 a_n は 1 に収束する．p_m の列が収束しない（振動する，あるいは $\pm\infty$ に発散する）かまたは 0 に収束するとき，無限乗積は**発散する**という．したがって無限乗積が“収束して積が 0”というのと“0 に発散する”というのとは意味が違う．

例 5 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は 0 に発散する．$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^2/n^2)$ の右辺は，$x = 0$

のとき収束して，積は 0 である．

無限乗積を $\prod_{n=0}^{\infty}(1+b_n)$ と書けば，収束するとき $b_n \to 0$ となる．ここで $\prod_{n=0}^{\infty}(1+|b_n|)$ が収束するとき，無限乗積 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+b_n)$ は**絶対収束**するという．これは，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束することと同値である．

しかし，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ の収束と $\prod_{n=0}^{\infty}(1+b_n)$ の収束との間には一般に何の関係もない．ブルバキの本でもここに記号 ☡（危険な曲り角）がついている．

例 6　$b_{2m+1}=-b_{2m},\ b_{2m}=1/\sqrt{m+2}$ $(m=0,1,2,\cdots)$ とおくと，

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$$

は交代級数であって，絶対収束ではないが，0 に収束する．しかし，無限乗積のほうは

$$\prod_{n=0}^{2m-1}(1+b_n)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{m}{m+1}=\frac{1}{m+1}$$

であって，0 に発散する．他方，

$$b_{2m} = 1/\sqrt{m+1}, \qquad b_{2m+1} = -1/(1+\sqrt{m+1}) \qquad (m=0,1,2,\cdots)$$

とおくと，無限乗積は

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)\cdots\cdots$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\cdots\cdots=1$$

と収束するが，級数のほうは

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}+\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}+\cdots\cdots>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots$$

であって，右辺が $+\infty$ に発散するから，左辺も $+\infty$ に発散する．

以上の例において，偶数個の項の部分和や部分積しか考えなかったが，$b_n \to 0$ だから奇数個の項の部分和や部分積も同じ極限値をもち，振動することはない．

最後に，テイラー展開に関して一言しておく．

$f(x)$ が点 a を含む開区間で C^∞ 級ならば，$f^{(0)}(a)=f(a)$ として，形式的なテイラー展開

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ができる．しかしここで，次の二つの根本的な問題を生ずる．

1° これが（少なくとも a を含むある開区間で）収束するか？

2° その和がもとの $f(x)$ と一致するか？

この両方とも成立するのが解析関数であるが，$f(x)$ が何回でも微分できて，導関数が連続（C^∞ 級）というだけでは，どちらも成立しない．

例 7 2° が成立しない有名な例は

$$f(x) = e^{-1/|x|} \qquad (f(0) = 0 \text{ とおく})$$

である．§3 末で述べたように，$\lim_{x\to a} f'(x)=\alpha$ が存在すれば，$f(x)$ は $x=a$ で微分可能で $f'(a)=\alpha$ である．これにより $f(x)$ は $x=0$ でも無限回微分可能であり，$f^{(n)}(0)=0$ である．したがって形式的テイラー展開は収束するが，和は 0 であって $f(x)$ にもどらない．

他方，1° が成立しない反例は難しい．具体的に式で表わされる関数の例をずいぶん探したが，みあたらなかった．しかし，そういう関数は厳然と存在する．じつは次のような定理が成立するのである．

定理 数列 $\{c_n\}$ を任意に与えるとき，原点 0 を含む開区間で C^∞ 級であって，$f^{(n)}(0)=c_n$ である関数 $f(x)$ がつねに存在する．

これによって，急激に大きくなって収束半径が 0 になるような列 $\{c_n\}$——たとえば $c_n=(n!)^2$——をとれば，この定理にいう $f(x)$ の形式的テイラー級数は，$x=0$ 以外では発散する．

上の定理は $f(x)$ を具体的に構成してみせればよいのであるが，技術的にかなり繁雑なので，残念ながら証明は割愛する．拙著『解析学序説(新訂版)上』，付録§8, pp. 238—240，を参照されたい(初版には書いてない)．

ただし“ミクシンスキーの演算子法”において，微分演算子を D とするとき，演算子の位相で，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n D^n/n! \qquad (a\text{は定数})$$

は収束して，a だけずらす演算子 $T: Tf(x)=f(x+a)$ になることが証明できる．その意味では

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n f^{(n)}(x)/n! = f(x+a)$$

という公式は，f が**連続**関数（古典的な意味で微分不可能でもよい）について“正しい”公式である．もちろんそのためには，“(古典的な意味で）微分不可能な関数 f に（演算子の意味で）微分演算子を施した結果”といった，一見“矛盾した”命題に正しく意味をつける作業から始めなければならない．——超関数の理論はよく“関数概念の拡張”とよばれているが，本質的なのはむしろ“微分演算の拡張”なのである．

なお，テイラー展開の収束半径が有限（0 でない）のとき，その収束円周上での収束・発散にはいろいろの場合がある．

例 8　いずれも収束半径 1 の整級数だが，

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ は $|x|=1$ 上ですべて発散

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ は $|x|=1$ 上，$x=1$ では発散，他では条件収束

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ は $|x|=1$ 上すべての点で絶対収束

最後の例で，$x=1$ はこの整級数の表わす解析関数の特異点である．——整級数は，収束円周上に必ず特異点をもつ．また $a_n \geqq 0$ ならば，$\sum a_n x^n$ の収束半径が r $(0<r<\infty)$ のとき，収束円と正の実軸との交点 $x=r$ が特異点である(ヴィヴァンティの定理)．それにもかかわらず，整級数そのものはそこで絶対収束する．これは，整級数が収束するからそこで正則だ，と早合

点してはいけない反例でもある.

§6 積 分

積分の概念は，元来は面積などの区分求積から発生した．それが一般化されて，リーマン積分，ルベーグ積分と整理されてきた．しかし近年の教科書では，積分を**逆微分**として導入して，面積との関係はあとで応用として扱うのが通例になってきた．これは演習問題を早くやりたいためであろうが，そのために理論の基礎に問題が生じてきた．

$f(x)$ の導関数 $f'(x)=\varphi(x)$ に対して，$f(x)$ はもとの関数という意味で**原始関数**とよぶのが正しい．**不定積分**とは，元来は区間を変数とした積分値 $[a,b]\longrightarrow\int_a^b\varphi(t)\,dt$ のことである．それは，（若干の自然な条件の下に）$\varphi(x)$ の一つの原始関数 $F(x)$ によって $F(b)-F(a)$ と表わされ，a を固定して b を変数 x とするとき，x の関数として微分可能で，その導関数が初めの $\varphi(x)$ に等しいものである．――その条件とは，たとえば $\varphi(x)$ が区間の端まで連続ならばよい．ルベーグ積分を使えば，$\varphi(x)$ が積分可能（$|\varphi(x)|$ が積分可能）であるとき，$G(x)=\int_a^x\varphi(t)\,dt$ は x について絶対連続であり，ほとんどいたるところ（零集合を除いて）微分可能であって，ほとんどいたるところ $G'(x)=\varphi(x)$ が成立する，という形になる．

通常の解析学では，主として連続関数のみを対象とするから，原始関数と不定積分とを混用しても混乱は生じない．“原始関数”という用語自身が教科書の最初以外には使われなくなり（すでにこの用語を廃止した教科書もある），上述のような用語の使いわけも，実用上ではたいした意味をもたなくなってきている(?)．両者の区別を強調した“反例”もいくつかあるが，正直なところ，零集合の例外を認める立場にたてば，ほとんど意味がない．しかし，注意を喚起する意味で，二,三のべておく．

例1　$f(x)=\mathrm{sgn}(x)$（$x<0$ のとき -1，$x>0$ のとき $+1$，$x=0$ のときは任意だが，一応 0 とする）．これは $x=0$ で不連続――しかも左右の極限値が別々に存在する型――であって，導関数にはなりえない関数である．

$a=0$ からの不定積分は，$x<0$ のとき $-x$，$x>0$ のとき x（$x=0$ のときは 0）であって，$F(x)=|x|$ とまとめて書くことができる．これは $x=0$ で微分不可能である．しかし，この一点（零集合）の例外を許せば，$f(x)$ の“原始関数”であるといって差し支えない．

例 2　$1/x$ のまったく一般の原始関数は，$\log|x|$ あるいは $\log|x|+c$ では不十分である．

この関数は $x=0$ で不連続であり，そこでは積分不可能である（変格積分が収束しない）．したがって $x>0$ と $x<0$ とで別々に定義された関数であって，その不定積分は積分を始める点の属する区間内でしか定義できない．まったく一般の原始関数は，a, b を積分定数として

$$\begin{cases} x>0 \text{ のとき} & \log x + a \\ x<0 \text{ のとき} & \log(-x)+b \end{cases}$$

である（図 21）．これを $\log|x|$ とまとめて書くのは，一種の略記法にすぎない．

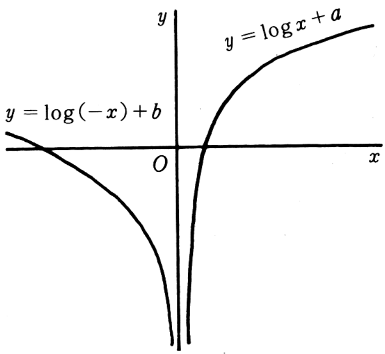


図 21　$1/x$ の一般的な原始関数

しかしながら，$1/x$ の原始関数をいちいちこのように“正確に”記述しても，繁雑になるだけで，それによる利点はほとんどない．第一，定積分を計算するとき，$x=0$ を含む区間の両端を代入したら誤りとなる．個々の問題では $x>0$ または $x<0$ の一方の区間のみが必要であり，その場合には，$\log|x|+c$ という略記で十分である．あるいは負数の対数は，πi の奇数倍の虚数部がつく複素数となるが，虚数部は定数だから積分定数の一部と割り切ってしまえば，$\log x+c$ と手抜き（?）して書いても誤りではない．このへんをうるさく記述している教科書もあり，一度はそういう事情を自覚することも重要だが，知ってしまった上ではそれを承知で手抜きするのが“経済的”なやり方なのである．数学のような高度の理論科学でも，そういった慣習上の略記法は多いのであって，そういうところに徒らにめくじらをたてるのは

実りが少ないと信ずる.

次に，**無限積分**について一言する.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

が存在する（有限値）なら，$x\to+\infty$ のとき $f(x)\to 0$ か？ $f(x)$ が単調ならもちろんそうだが，一般にそうではない．$\limsup_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ であっても，無限積分が収束することがある．それは，高さが高くなるが幅が急激に狭くなるピークを次々にもつ $f(x)$ である．具体例は，次のとおりである．

例 3 $\dfrac{x}{1+x^6\sin^2 x}$ は $x=n\pi$ の所で値 $n\pi$ をとり，いくらでも大きくなる．しかし

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\,dx < \frac{1}{n^2} \qquad (n\geqq 1)$$

であり，$[1,\infty[$ でのこの無限積分は収束する．

上記の話題から若干逸脱するが，現在の数学では“関数”という語を“写像”,“対応”とほぼ同意に使っている．しかし，それは“関数”概念の一面にすぎないような気がする．数値計算の立場では“関数”は“値の表”として表現される対象と考えるほうが実用的である．解析学では“関数”とは，微分や積分といった諸演算が施されるべき適当な関数空間の要素，と考えるのが最も便利である．

ルベーグ積分の対象になる**可測関数**は，正確には，零集合における値の差を無視した（それで類別した）同値類であるから，特定の点における値という概念は本質的な意味をもたない．――だからといって，全体での“値”がどうでもよいことではない．――その意味で“写像”としての面が希薄だが，それをさらに端的に示す例として，可測関数の合成関数は必ずしも可測でない，という事実がある．

もう少し詳しくいうと，次のようになる．

定理 $y=f(x)$, $z=g(y)$ の**合成関数**を $z=h(x)\equiv g(f(x))$ とおく．$f(x)$, $g(y)$ がボレル可測関数ならば，$h(x)$ もボレル可測関数である．$f(x)$ がルベ

ーグ可測で，$g(y)$ がボレル可測ならば，$h(x)$ もルベーグ可測である．しかし，$g(y)$ がルベーグ可測のとき，$f(x)$ がボレル可測であっても（ましてルベーグ可測では），$h(x)$ は必ずしも可測とは限らない．

例 4　この最後の例は，あまり教科書に載っていない．ここにあげるのは伊藤清三教授が作ったもので，同氏の著書『ルベーグ積分入門』（裳華房，1963，pp. 72—73）に載っている．

§4 例 5 の“悪魔の階段”（図 18）を $y=\varphi(x)$ とし，その“逆関数”を

$$f(x) = \inf\{t \mid \varphi(t)=x\}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

とおく．これは単調増加なのでボレル可測である．他方，区間 $]0,1]$ の中の非可測集合 A を，実数を差が有理数であるとき同値として類別した，各類の代表要素（選択公理が必要！）からなる集合として作る．$x\in A$ に対する $f(x)$ の値域を B とし，その補集合の特性関数を $g(y)$ とおく．―― $y\in B$ なら $g(y)=0$，$y\notin B$ なら $g(y)=1$．B は零集合であって，$g(y)$ は可測である．しかし，合成関数 $h(x)$ に対して

$$\{x \mid h(x)<1/2\} = \{x \mid f(x)\in B\} = A$$

は非可測であって，$h(x)$ はルベーグ可測ではない．

積分をめぐっては，理論面よりも実用面において，その不定積分の計算法や数値積分公式の選択などについて述べたいことが多数あるが，本書の趣旨から逸脱するように思うので，ここでは省略する．

§7　極限の順序交換

解析学の重要な（そして繁雑な）諸定理は，微分・積分・極限など広義の極限算法を，別の変数について 2 度以上施したときの，順序交換に関するものといってよいかもしれない．たいていの場合，無神経に行なっても大丈夫で，おかしな結果がでたら考え直せ，というので十分だが（?），ときとしてそのへんをいい加減にしたために結論が誤まっていることが後でわかった大家の論文もある．絶対収束とか一様収束といった一般論だけでは片づかず，

個々の例について大変な議論をしなければすまない場合もある．ルベーグ積分が便利な点の一つは，次の定理が成立することであろう．

優越収束定理　積分可能な関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に点別収束して，$|f_n(x)| \leqq \varphi(x)$ をみたす n によらない一定の積分可能関数 $\varphi(x)$ があるならば，

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

極限の順序交換については，非常に多くの組合せがあり，その一つ一つに数多くの微妙な反例があるが，必ずしもすべてを網羅する必要はないと思うので，典型的な例をいくつかあげるのに留める．

例1　項別微分

実変数の C^1 級関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束しても，$f(x)$ が微分可能とは限らないことは，ワイエルストラスの微分不可能関数が，一様収束する三角級数で表わされることからわかる．また，任意の連続関数（いたるところ微分不可能でもよい）が有限区間で一様に多項式列で近似されることからもわかる．たとえ極限の $f(x)$ が微分可能であっても，$f_n'(x)$ が $f'(x)$ に収束するとは限らない．$f_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin nx$ は，$n\to\infty$ のとき一様に $f(x)=0$ に収束するが，$f_n'(x)=\cos nx$ は $f'(x)=0$ に収束しない．——ただし，これは収束の位相を通例の点別収束と限定した場合である．適当な関数空間では $\cos nx\to 0$ $(n\to\infty)$ であるような位相（一種の弱位相）を扱う場合もある．

実関数級数の項別微分については，次のような“逆微分”の形の定理しか成立しない．

$\sum f_n(x)=f(x)$ が収束し，$f_n(x)$ が C^1 級で，$\sum f_n'(x)$ が一様に $g(x)$ に収束すれば，$f(x)$ は微分可能で $f'(x)=g(x)$ となる．

この定理を積分法を使わずに微分法の範囲だけで証明することは可能だが，しばしば“微分法の範囲で最も難しい定理”といわれる．高木先生の有名なしゃれ“ビブンのことはビブンでせよ”も，この定理の証明の工夫だった．

例2　上の定理で，$\sum f_n(x)$ が**収束する**（点別収束すれば，結果的に一様

収束になる）という仮定は必要である．——その反例は $\sum 1$ （$f_n(x)=1$）である．$1'=0$ であり，$\sum 0$ は 0 に一様収束するが，$f=\sum 1$ は発散するから無意味である．こういう項を $\sum f_n$ に追加すれば，いくらでも同様の反例ができる．

これに対して複素解析関数の世界では，ワイエルストラスの**二重級数定理**とよばれる，次の定理が成立する．

複素数平面（もっと一般にリーマン面上でも）の領域 D で複素解析関数級数 $\sum f_n(x)=f(x)$ が一様に収束すれば，$f(x)$ も解析関数であり，D 内の任意のコンパクト集合上で $\sum f_n'(x)$ が一様に収束して，和は $f'(x)$ になる．

複素数平面上からみれば，実数という特別な線上だけでの一様収束では，あまりに特殊すぎて，極限関数に対する拘束力が弱すぎるのであろう．

例 3　項別積分

このほうは，実用上では前述の“ルベーグの収束定理”で，ほぼ間にあう．関数列 $f_n(x)$ が点別に 0 に収束しても

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

とならない例として，次のような例がよく教科書にある(図22)．

$$f_n(x) = n^2xe^{-nx}, \qquad \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^n te^{-t}\,dt = 1-(1+n)e^{-n} \to 1.$$

この場合には，図 7 の場合と違ってこの $f_n(x)$ では山が次第に高くなるが，$x>0$ を固定すれば $n\to\infty$ のとき，いつかは山が x より左にきて，$f_n(x)\to 0$ となることに変りはない．

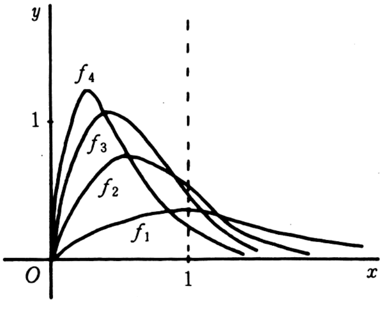


図22　$f_n(x)=n^2xe^{-nx}$

しかし，この例で $f_n(x)$ の極限関数は，本当は見かけ上の 0 ではなく，正しくはディラックの“δ 関数”なのであり，その積分は 1 であって，やはり項別積分が成立している，と解釈するほうが，実り豊かのように思う．——もちろん $\delta(x)$ は通例の“関数”では

なく，上の命題を合理化するために，適当な関数空間と位相を導入する必要があるが．——

例 4　$f_n(x)=nx/(1+n^2x^2)$ は $[0,1]$ で 0 に点別収束するが，一様収束ではない．しかし，項別積分が許される．じっさい，

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2n}\log(1+n^2) \to 0$$

である．$f_n(x)=x^n-x^{2n}$ も同様である．

これらの例は，ルベーグの収束定理に含まれる．

例 5　$f_n(x)=x^ne^{-x}/n!$ は，$x\geqq 0$ で一様に 0 に収束する(図 23)．したが

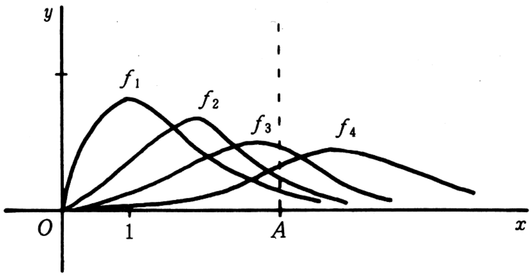


図 23　$f_n(x)=x^ne^{-x}/n!$
（縦横の比率を違えてある）

って，任意の有限区間 $0\leqq x\leqq A$ では

$$\int_0^A f_n(x)dx \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

となる．しかし，無限区間での積分はつねに

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = 1$$

であって，0 に収束しない．無限区間 $\{0\leqq x\}$ 全体では，一様に積分可能な関数でおさえられないのである(図 23)．この例は，無限区間では単に一様収束するだけでは不十分なことを示す．

例 6　偏微分の順序交換

$f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍の各点で x についても y についても偏微分可能であり，$f_x(a,y)$ が y について $y=b$ で，$f_y(x,b)$ が y について $x=a$

で，微分可能であっても

$$\frac{\partial}{\partial y} f_x(a, y)\Big|_{y=b} \neq \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, b)\Big|_{x=a}$$

である例として，次のような例が，たいていの教科書に載っている．

$(a, b)=(0, 0)$，$f(x, y)=xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$，ただし $f(0, 0)=0$ とおく．

$$\frac{\partial}{\partial y} f_x(0, y)\Big|_{y=0} = -1, \qquad \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, 0)\Big|_{x=0} = 1$$

——ここでは記号の意味を明確にするために，わざと普通には使わない記法を採用した．

しかし，このような現象の生ずる点は $f(x, y)$ の特異点であり，一般に，$\partial^2 f/\partial x\partial y$ と $\partial^2 f/\partial y\partial x$ とは（両者とも存在する限り）ほとんどいたるところで一致する．そして，“混合型偏導関数”は，x, y の順序を問わず，二重極限

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(x+a, y+b)-f(x, y+b)-f(x+a, y)+f(a, b)}{hk}$$

によって定義される．——これが存在し，通例の $\partial^2 f/\partial x\partial y$, $\partial^2 f/\partial y\partial x$ が存在すれば，それらはすべて一致する．なお，この極限値を“シュワルツの導関数”ということもあるが，この用語はまったく別の対象にも使われるのでまぎらわしい．

例7　シュワルツの定理　点 (a, b) の近傍で f_x, f_y, f_{xy} が存在して，(a, b) で f_{xy} が連続なら，(a, b) で f_y は x について偏微分可能であって，$f_{xy}(a, b)=f_{yx}(a, b)$ である．

このとき f_{xx}, f_{yy} は存在しなくてもよい．じっさい，そのような例がある．$\varphi(x)=x^4\sin(1/x)$（$\varphi(0)=0$ とする）とおき，

$$f(x, y) = [\varphi(x)-\varphi(y)]/(x-y), \qquad f(x, x) = \varphi'(x)$$

とおくと，$f(x, y)$ は $(0, 0)$ の近傍の各点で f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} をもち，

$$f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$$

である．しかし，原点で f_{xx}, f_{yy} は存在しない．

例 8 累次積分の順序交換

この形の定理を総称して，**フビニの定理**とよぶことが多い．リーマン積分の範囲では，二重積分を導入しなくても，1 変数のリーマン積分の範囲で次の定理が証明できる．

定理 $f(x, y)$ が $a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$ で 2 変数の関数として連続ならば，一方の変数を止めて作った定積分

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx, \qquad h(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

は，それぞれ y, x について連続であり，

$$\int_c^d g(y)\,dy = \int_a^b h(x)\,dx$$

である．

この連続性は，ある程度ゆるめられる．線分や円弧で境される，有限個の部分領域のおのおので連続で，その中から境界に近づいても連続な極限値がある，といった形にすると実用上使いやすい．しかしまったく一般では，両方の累次積分がそれぞれ存在しても一致しない例がある．

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx \right] dy = \int_0^1 \frac{-dy}{1 + y^2} = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dy \right] dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

この例の被積分関数は，区間の隅の $x = y = 0$ において連続でなく，近づく方向によって $-\infty$ にも $+\infty$ にもなりうる．二重積分（原点での変格積分）は存在しないが，原点での主値積分は 0 になる．

例 9 $f(x, y)$ が $0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1$ で定義され，x を任意に固定したとき y について積分可能で $\int_0^1 f(x, y)\,dy = h(x)$ が x について可測，また y を任意に固定したとき $\int_0^1 f(x, y)\,dx = g(y)$ が y について可測であっても，そしてさらに

$$\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 g(y)\,dy$$

であっても，$f(x,y)$ が2変数（積空間）の可測関数とは限らない．

この反例は興味深いが，それを作るには整列可能定理や超限帰納法を必要とし，大変に長くかかるので，ここでは記述を省略する．たとえば，前記の伊藤清三教授の本の pp.109—111 に記述されている．

例 10　無限積分の順序交換

この場合も，絶対収束する被積分関数については簡単だが，必ずしも絶対収束しない無限積分（したがって，リーマン積分ではよいが，ルベーグ積分は使えない！）に対して順序交換をしたい場合がある．かなり特殊な形だが，次の**ハーディ-ティッチマーシュの定理**は応用が広い．

$f(x)$ が $0<x$ で連続，$\int_1^\infty |f(x)/x|\,dx$, $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ が収束すれば，

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-tx} f(x)\,dx\right] \cos at\,dt = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-tx} \cos at\,dt\right] f(x)\,dx.$$

なお $\sin at$ にしても同様の定理が成立し，このときには $\int_1^\infty |f(x)/x^2|\,dx$ が収束すればよい．

この証明は省略するが，$f(x)=x^{-1/2}$ や $f(x)=1$（sin の場合）に適用すれば，次のような有名な定積分がこれからすぐに計算できる．

$$\int_0^\infty \frac{\cos at}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sin at}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin at}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \qquad (a>0)$$

例 11　微分と積分の順序交換

$f(x,y)$ が $K=\{(x,y)\,|\,a\leqq x\leqq b,\ \alpha\leqq y\leqq\beta\}$ において連続であり，$f_y(x,y)$ も存在して K で連続ならば，

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

は y について連続であり，

$$g'(y) = \int_a^b f_y(x,y)\,dx$$

である．

この定理は直接にも証明できるが，$f_y(x,y)$ に累次積分の交換可能定理を

適用しても証明できる．

この定理を利用して，一つの定積分を助変数で微分して新しい定積分を導くことなどができるが，無限積分や変格積分のときには注意を要する．しかし，その反例は省略する．

§8 むすび

以上に述べてきたのは，いわゆる初等的な微分積分学の範囲の話題であった．複素解析・フーリエ解析・微分方程式などにはほとんど触れなかった．曲線や曲面などの図形への応用をはじめ，関数解析・確率論など多くの分野については，まったく無視せざるをえなかった．冒頭に名をあげたカオスなども論ずることができなかった．全体としてあまりにも平凡な揚げ足とり的な例に終始したようで，恥しい次第である．

ただ近年の解析学が著しく変動しつつあることを一言しておこう．それは一つには計算機の発展のせいであるが，他方，17世紀の無限小を合理化した非標準的解析（超準解析）や，19世紀後半に研究されて忘れられていた“準解析関数”などの発掘・再認識といった“古典のリバイバル”的な性格も感ぜられる．いつまでも19世紀の ε-δ 論法を金科玉条と心得ていては，“時代遅れ”なのかもしれない．

付記． 今回の新訂版に当って，若干の内容の増補の機会を得たので，以上の本文と合わせて次ページ以降を参照下されば幸いである．

解析学における反例（増補）

一松　信

§9　微分可能関数と解析関数

本文§3でいたるところ微分可能でない関数を解説したが，この種の関数は，近年フラクタルの典型例として脚光をあびてきた．

歴史的に最も古い例（ワイエルストラスの例以前）は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin(2^n\pi x)$$

とされる（1860年頃）．しかし，これがいたるところ微分不可能なことの証明は，それほどやさしくない．証明のしやすさという点では，クーパーの例（1953年）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(n!\pi x)$$

あるいは，筆者が『微分積分学入門』（サイエンス社，1971）の付録に紹介した

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin(2^{1+2+\cdots+n}\pi x)$$

のほうがよい．ただ，これらは図示すると意外となめらかに見える．

この方面で近年有名になったのは高木関数（1903年）である．それを作るには，まず

$$T_1(x)=\begin{cases}2x & 0\leqq x\leqq 1/2\\ 2(1-x) & 1/2\leqq x\leqq 1\end{cases}$$

とおく．以下，$n=2,3,\cdots$ に対して順次

$$T_n(x) = T_1(T_{n-1}(x))$$

とおくとき，次の級数の和が**高木関数**である：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} T_n(x).$$

高木関数を，超関数として拡張した意味で2回微分したものは，一種の無限多重極であるが，数学的に意味のある対象である．本文§1に物理学者があきれかえった“怪物”と書いたのは，これが念頭にあった．

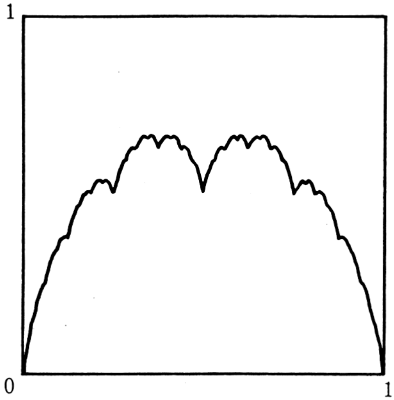


図 24　高木関数のグラフ

次に，§5で述べた C^∞ 級関数と解析関数について，最近いたるところ解析的でない C^∞ 級関数のおもしろい例が発表されたので紹介したい．原論文は次のとおりである：

Keiko Kabaya[1]-Masao Iri[2]: Sum of Uniformly Distributed Random Variables and a Family of Nonanalytic C^∞-Functions, *Japan J. of Applied Math.*, **4** (1987), pp. 1－22.

$0 < \alpha < 1$ とし，区間 $[-1, 1]$ で一様分布する独立な確率変数の族 $\{U_i\}$ を考える．このとき，確率変数

$$X_n = \alpha[U_n + (1-\alpha)U_{n-1} + \cdots + (1-\alpha)^{n-2}U_2 + (1-\alpha)^{n-1}U_1]$$

の確率密度関数 $p_n(x)$ は，$n \to \infty$ のとき区間 $[-1, 1]$ において一様にある関数 $p_\infty(x)$ に収束し，それは C^∞ 級であるが，無限に多くの点で解析的でない．特に $\alpha = 1/2$ のときが最も病的で，いたるところ解析的でない上に，どのような**準解析関数**（quasi-analytic function）の族にも含まれない．――準解析関数とは，C^∞ 級関数の族で，定義域の一点 a での各回の微分係数

1）　蒲谷桂子（現姓今井；現在九州工業大学）

2）　伊理正夫（当時東京大学工学部長）

$f^{(m)}(a)$ の値（$m=0,1,2,\cdots$）が定まれば，関数 $f(x)$ がその族の中に唯一つ決まる，という性質をもつものである．

同論文にある $\alpha=1/2$ のときの $p_\infty(x)$ およびその2階までの導関数のグラフを図25に示す．一見なんでもないようだが，$p_\infty''(x)$ が激しく波打つのが要注意である．他方，$\alpha>1/2$ のときには，$p_\infty(x)$ はほとんどいたるところ（ルベーグ測度0の集合以外で）多項式に等しいのにもかかわらず，カントル集合（ルベーグ測度は0だが，連続体の濃度をもつ）上で解析的ではない．

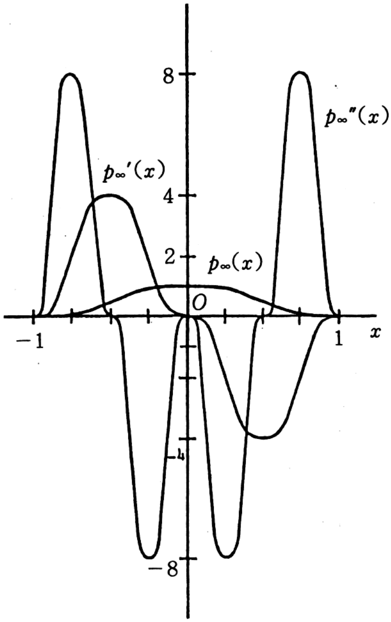


図 25　$p_\infty(x)$ とその導関数

この証明は興味深いが，かなり長くかかるので，ここでは省略せざるをえない．興味のある方は，原論文を参照してほしい．筆者が特に驚いたのは，このような“病的な”関数が，意図的にそれを目標として作られたのではなく，確率論のごく自然な基本的問題から，必然的に派生したという事実である．

§10　関数関係と逆関数をめぐって

実関数の世界では，C^1 級の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が0にならなければ，$y=f(x)$ は単射（$x_1\neq x_2$ ならば $f(x_1)\neq f(x_2)$）である．―― これはたとえばロルの定理による．しかし，複素解析関数では，$a\neq b$, $f(a)=f(b)$ である a, b があって，しかも a, b を含む凸な領域で $f'(x)\neq 0$ であることがありうる．その一例は指数関数 $f(z)=e^z$ である：$f(0)=f(2\pi i)=1$．すなわち，つねに $f'(z)\neq 0$ だからといって，大域的に一価な逆関数が作ら

れるとは限らない．

多変数関数になると，いっそう複雑になる．C^1 級写像

(1)　$$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n), \qquad i = 1, \cdots, n$$

のヤコビアン

(2)　$$J = \det\left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right]_{i, j = 1, \cdots, n}$$

がある点で0でなければ，その近傍で一価な逆写像

$$x_j = g_j(y_1, \cdots, y_n), \qquad j = 1, \cdots, n$$

が作られることは，多くの教科書にあるとおりだが，ヤコビアンがいたるところ0でなくても，大域的に一価な逆写像が存在するとは限らない．これは上記の e^z ($z = x + iy$) を実部と虚部に分けた写像を作ればわかる．すなわち

$$u = e^x \cos y, \qquad v = e^x \sin y$$

とすれば，ヤコビアンは $e^x \neq 0$ だが，(u, v) は $(x, y) = (0, 0)$ と $(0, 2\pi)$ とで同一の値をとる．

このような反例があるので，大域的逆写像定理は難しい．経済学では，要素価格均等化理論において，この種の逆写像の存在定理を「ユニバレンス（一価性）定理」と呼んでいる．サミュエルソン（Samuelson）はかつて $[\partial y_i / \partial x_j]$ の主座小行列式がすべての点で0でなければ，一価な逆写像が存在すると予想したが，マッケンジー（R.E. MacKenzie）は，次のような反例を構成した（1967年）．この例は同時に，当時予想されていたいくつかの付帯条件をつけた命題も成立しないことを含み，数理経済学者にかなりのショックを与えたようである．

$$y_1 = v \exp\left[-\frac{{x_2}^2 + {x_3}^2}{8v^2}\right],$$

$$y_2 = y_1 \exp\frac{1}{144}\left[\exp\frac{x_2}{v} \cdot \cos\frac{4\pi x_3}{v} - \exp\frac{1}{16} \cdot \cos\frac{\pi}{4}\right],$$

$$y_3 = y_1 \exp\frac{1}{144}\left[\exp\frac{x_2}{v} \cdot \sin\frac{4\pi x_3}{v} - \exp\frac{1}{16} \cdot \cos\frac{\pi}{4}\right],$$

ここに $v = x_1 + x_2 + x_3$.

その後，マッケンジー自身をはじめ，日本では二階堂副包（当時大阪大学，現在一橋大学）らによって，いろいろな逆写像の一意性に関する十分条件が得られていることを付記しておく．

これと関連して，1 変数の C^{n-1} 級の n 個の関数 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ について，それらのロンスキアン

$$W = \det[y_i^{(j-1)}(x)]_{i,j=1,\cdots,n} \qquad (y_i^{(0)} = y_i)$$

が恒等的に 0 ならば，$y_1(x), \cdots, y_n(x)$ は一次従属という命題がある．もっとも，ここで**一次従属**という語を厳密に

すべてが 0 とは限らない定数 $c_1, \cdots, c_n$ があって

(3) $$c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) \equiv 0 \qquad \text{（恒等的に）}$$

と解釈すると，この命題は正しくない．$n=2, -1 \leqq x \leqq 1$ として，

$$y_1(x) = x^3, \qquad y_2(x) = |x|^3 = (\operatorname{sgn} x)\cdot x^3$$

とおけば，ともに C^2 級で $y_1'(x) = 3x^2$, $y_2'(x) = 3(\operatorname{sgn} x)\cdot x^2$ であり，W はつねに 0 だが，線型関係は

$$x \geqq 0 \text{ で } y_1 - y_2 = 0; \qquad x \leqq 0 \text{ で } y_1 + y_2 = 0$$

であって，全区間で一つの定数では (3) は成立しない．ただし，$y_i(x)$ がすべて解析関数であるか，あるいは実用上重要な場面なのだが，連続関数を係数とする定まった n 階常微分方程式（$y^{(n)}$ の係数は 0 にならないとする）の解である場合には，上記の命題は (3) の意味で正しい．

§11　微分方程式の解の存在と一意性

1 階常微分方程式の**初期値問題**

(1) $$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

は，右辺の関数 $f(x, y)$ が点 (x_0, y_0) の近傍で連続なら必ず解をもち，さらに，たとえば y について**リプシツ条件**

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq L|y_1 - y_2| \qquad (L \text{ は定数})$$

をみたせば，解は一意的である．

単に f の連続性のみの仮定で解の存在を証明するのは，かなり難しいが，

リプシツ条件まで仮定して存在と一意性を証明することは，多くの教科書にある．その方法は大別して，コーシーの多角形法（オイラー法による数値解法）の極限をとるものと，(1) を“積分方程式”

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt+y_0 \tag{2}$$

に変換して逐次代入するピカールの方法，あるいはそれを抽象化した不動点定理を応用するものと2種類ある．

現在では後者が主流であり，前者は理論が難解という理由で敬遠されがちだが，区分求積法によるリーマン積分の存在とほとんど同様に証明できる．一様連続性からリーマン積分の存在を厳密に論ずるならば，もう一歩進めて微分方程式の解の存在証明の形で扱い，$f(x)$ の積分は特別な微分方程式 $y'=f(x)$ の解であるとするのがよい．—— これはルベーグ積分の一つの拡張であるペロン積分の理論に直結する．—— ただし，大学初年級の微分積分学でそのような講義をするのは，私自身も失敗した経験があり，慎重に扱わなくてはいけない．

リプシツ条件が成立しないと，たとえそれをゆるめたヘルダー条件

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqq L|y_1-y_2|^{\alpha}\qquad(0<\alpha<1;\ 定数)$$

が成立しても，解の一意性が成立しない反例は，

$$y'=2\sqrt{y},\qquad y(0)=0 \tag{3}$$

である．これは変数分離形だから，定跡どおりに解けるが，(3) の解はそのようにして求まる $y=x^2$ だけではない．$y\equiv 0$（恒等的に0）も (3) の解である．じつは (3) の解は無限にある．c を正の定数として $(x-c)^2{}_+$，すなわち

$$y=\begin{cases}0 & 0\leqq x\leqq c\\ (x-c)^2 & x\geqq c\end{cases} \tag{4}$$

とした関数は，すべて C^1 級であって (3) の解である．$y=x^2$, $y=0$ は (4) で $c\to+0$, $c\to+\infty$ とした両極端である．

ペロンが証明したとおり，(1) の右辺が連続で解の一意性が成立しない場

合，その解の中には最大解 $y_+(x)$ と最小解 $y_-(x)$ とがあり，両者の中間が解で完全に充たされる.—— ある x_1 において $y_+(x_1) > y_-(x_1)$ なら，両者の中間の値 α に対して，$y(x_1) = \alpha$ をみたす解がある.—— 上記の（3）では，$y = x^2$ が最大解，$y = 0$ が最小解であり，${x_1}^2 > \alpha > 0$ ならば，ちょうど $(x_1 - c)^2 = \alpha$ $(c < x_1)$ であるようにcをとれば（$c = x_1 - \sqrt{\alpha}$），それに対する（4）が所要の解である.

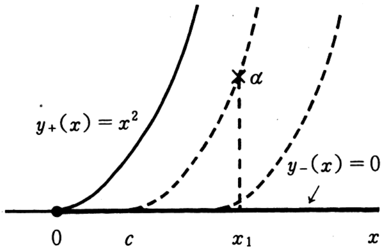


図 26

同様の例で私自身の経験談を述べよう．ヘンリチの『電卓による数値解析』（現代数学社）を訳したときのことであるが，大振幅の単振子の方程式

$$(5)\qquad y'' + a\sin y = 0. \quad (a\text{ は正の定数})\qquad \text{初期条件}\quad y(0) = y_0,\ y'(0) = 0$$

があった．定跡どおり $2y'$ を掛けて中間積分

$$(6)\qquad y'^2 = 2a(\cos y - \cos y_0), \qquad y(0) = y_0$$

を得るが，この平方根をとると，本質的に（3）と同じことになる．数値的に解くと，本来ならば $y \equiv y_0$（恒等的に y_0）という現実にはありえない解がでるはずなのである．ところが，ヘンリチの例では $y_0 = \pi/3$, $\cos y_0 = 1/2$ としており，$\cos y$ の計算で誤差が入って，$y'(0)$ が小さな正の数になるため，真の解と偶然（?）極めて近い数値解がでていた．別の計算機に移すと，（6）の右辺が負になって，平方根のエラーになった．このことをヘンリチに知らせたら，（6）に $y \equiv y_0$ という非現実的な特殊解（（5）の解ではない）が存在することを初めて知ったという返事をもらった．なお，（5）は数値的には，直接に2階のまま解いたほうがかえってよい結果が得られる．

ところでリプシツ条件は，解の一意性についての一つの十分条件にすぎない．その拡張には多くの結果がある．日本でも南雲道夫（1930年代；当時大阪大学）の条件などがあるが，最終的に解の一意性を与える $f(x, y)$ に関する必要十分条件を与えたのは，戦後若くして亡くなられた岡村博（京都大

学；1905－1948）である．同氏に対する逸話は多いが，ここでそれを紹介するのはお門違いだろう．

他方，解の**存在**は自明か？　物理学者はよくそのように言うが，微分方程式をたてる際に多くのモデル化・理想化がされているので，現象が起こるからといって，解の存在を自明とは断言しかねる．境界条件を課すなら，たとえば

$$y'' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \tag{7}$$

には解がない．$y(0)=0$ をみたす一般解は $y = a\sin(\pi x)$ で，すべて $y(1)=0$ をみたすからである．

しかし，このような付帯条件との不整合でなく，本当に解がありえない微分方程式はあるのか？　多変数の偏微分方程式の世界ではそれがある．レビ（Hans Lewy, 1904－　）は1958年に次のような反例を示して，関係者にショックを与えた：

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial u}{\partial x_2} + 2i(x_1 + ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3} = f(x_3), \quad i = \sqrt{-1}. \tag{8}$$

右辺は x_3 のみの実関数である．レビは，もしもこの偏微分方程式（8）がC^1級の解 u をもてば，右辺の f は x_3 の解析関数でなければならないことを示した．したがって，もしも f が§9であげたようなC^∞級であっても，いたるところ解析的でない関数ならば，C^1級の解がない．まもなくヘルマンダー（L.V. Hörmander, 1931－　）は，じつはそのときには，超関数として拡張された意味での解さえ存在しないことを証明した．

この例は，1階線型偏微分方程式についてさえも，係数に複素数が入ると，古典的な理論がまったく成立しなくなることを意味している．そのへんの事情は今では詳しく解析されている．この発見以後，古典物理学に現われる多くの偏微分方程式について，解の存在が厳密に証明された．

微分方程式に対して，さらに数値解法を考えると，数多くの思いがけない現象が現われるが，それらはまたの折にしたい．

あとがき

数学を勉強していると，必ずいろいろな定理や命題に出会う．そのとき，定理についている条件とか仮定がなにを意味しているのか，定理を一読しただけではよくわからないことがある．そこで証明を読むと，どこにその条件が使われるかがわかり，一応定理もわかったような気になる．ところが，振り返ってみると，“一体なにを証明したのか”と疑問に感ずることがときにはあるであろう．そのようなとき，落ちついて考え，いろいろ自分で試してみたりすると，いろいろと奇妙なことに出くわす．そこで，このようなヘンなことを除外するために，あれこれと条件を入れたのだ，と納得する．——ここに出てきた奇妙なもの——これこそが“反例”であり，このようなことを実際に考えられるかどうかが，結局は数学を理解する（行なう）ことにつながるのではないだろうか．

また，数学の歴史をみてみると，“反例”がいままでにない新しい数学を生みだす原動力となることも稀ではないことに気づく．

以上のようなことを念頭におきつつ，高校生から大学初年級を読者対象に，“反例というものを通して数学を見直してみる”ことを目的とし，この本は企画された．各分野はそれぞれ独立しているので，読者は自由に自分の好みと必要に応じて好きなところから読みはじめるとよいと思う．なお，分野間の調整等は特にせず，各著者の持ち味を十分発揮していただいた．したがって，分野間の不統一等があるとすれば，それはすべて編者の責任である．

本書により，反例というものが数学のなかで果たしてきた役割，および，個々の定理や命題についての注意すべき反例など，多くのことを知ることができるであろう．また，このようなことのなかから，数学と人間との“かかわりあい”を感じとってくれたならば，編者としてたいへん幸いに思う．

1985年3月　　編者

著者紹介

岡部恒治（おかべ つねはる）

1946年　北海道に生まれる
1969年　東京大学理学部数学科卒業
現　在　埼玉大学教授

白井古希男（しらい こきお）

1944年　長野県に生まれる
1966年　東京教育大学理学部数学科卒業
現　在　静岡大学助教授

一松　信（ひとつまつ しん）

1926年　東京に生まれる
1947年　東京大学理学部数学科卒業
現　在　東京電機大学教授
　　　　京都大学名誉教授

和田秀男（わだ ひでお）

1940年　名古屋に生まれる
1963年　東京大学理学部数学科卒業
現　在　上智大学教授

反例からみた数学（改訂増補版）

1985年4月22日　初版第1刷発行
1986年9月16日　初版第2刷発行
1989年10月20日　改訂増補版
　　　　　　　　第1刷発行

定価はカバーに
表示しています

著　者　岡部恒治・白井古希男
　　　　一松　信・和田秀男

発行者　西原昌幸

発行所　遊星社
164 東京都中野区中野 3-50-1
電話（03）381-5914

発売元　星雲社
112 東京都文京区小石川 5-19-25
電話（03）947-1021

検印省略

印刷・製本＝平河工業社　Printed in Japan　ISBN 4-7952-6862-2